Übertragung des Goldbach-Vinogradovschen Satzes auf reell-quadratische Zahlkörper

Dissertation

zur Erlangung des Doktorgrades
der Mathematisch-Naturwissenschaftlichen Fakultät
der Georg-August-Universität zu Göttingen

vorgelegt von

Otto Körner

aus

Stolberg, Kreis Aachen

R. UNIV.
BIBLIOTHEEK
LEIDEN

Göttingen 1960

5211/61

D 7

Referent: Prof. Siegel

Korreferent: Prof. Deuring

Tag der mündlichen Prüfung: 20.5.1960

Sonderdruck aus

Mathematische Annalen, Bd. 141, S. 343—366 (1960)

Springer-Verlag, Berlin · Göttingen · Heidelberg

Körner, O.
Math. Annalen 141, 343—366 (1960)

Übertragung des Goldbach-Vinogradovschen Satzes auf reell-quadratische Zahlkörper*

Von

Otto Körner in Göttingen

Einleitung

Bekanntlich wurde die asymptotische Formel für die Anzahl der Darstellungen einer natürlichen Zahl als Summe von r Primzahlen ($r \geqq 3$) zuerst von Hardy und Littlewood im Jahre 1923 veröffentlicht [1]. Ihr Resultat hatten sie mit Hilfe der von ihnen entwickelten „Kreis-Methode" gewonnen unter der Annahme, daß die Realteile aller Nullstellen der Dirichletschen L-Funktionen kleiner als $^3/_4$ sind. Diese verallgemeinerte Riemannsche Vermutung konnte bis heute nicht bewiesen werden. Erst im Jahre 1937 gelang es Vinogradov, die Richtigkeit der asymptotischen Formel unabhängig von jeder unbewiesenen Hypothese sicherzustellen. Im Bereich der algebraischen Zahlkörper kann man eine ähnliche Entwicklung des verallgemeinerten Goldbachschen Problems verfolgen. Im Jahre 1924 konnte Rademacher die Hardy-Littlewoodsche Formel auf reell-quadratische Zahlkörper [3] und später auf beliebige algebraische Zahlkörper [4] übertragen, indem er seinen Betrachtungen eine der Hardy-Littlewoodschen analoge Vermutung über die Heckeschen $\zeta(s, \lambda)$-Funktionen zugrunde legte. 1955 bewies Tatuzawa [8] ohne eine solche Annahme, daß in einem algebraischen Zahlkörper jede ganze Körperzahl als Summe einer beschränkten Anzahl von Primzahlen des Körpers darstellbar ist. Dieser Satz spricht für die Rademacherschen Ergebnisse.

Die vorliegende Arbeit erbringt nun ohne Benutzung einer Hypothese einen Beweis der Rademacherschen Formel für reell-quadratische Zahlkörper.

Der Beweis beruht auf einer Verbindung zweier Methoden zur Anwendung trigonometrischer Summen auf additive Probleme, einer von Vinogradov und einer von Siegel. Nach Vinogradov machen wir einen Lösungsansatz mit endlichen trigonometrischen Summen über Primzahlen, und durch Übertragung einiger Schlüsse aus seiner berühmten Arbeit über das Goldbachsche Problem [9] führen wir diese Summen auf einfachere zurück. Die eigentliche Abschätzung der vereinfachten trigonometrischen Summen und die geeignete Unterteilung des in Frage stehenden Integrationsgebietes, die der Farey-Zerschneidung im Fall des rationalen Zahlkörpers entspricht, geschieht nach einer Methode von Siegel, die er zur Lösung des Waringschen Problems für

* Diese Arbeit wurde von der Mathematisch-Naturwissenschaftlichen Fakultät der Universität Göttingen als Dissertation angenommen. Herrn Prof. C. L. Siegel bin ich zu großem Dank verpflichtet. Er regte mich zu dieser Arbeit an und gab mir viele wertvolle Ratschläge bei ihrer Abfassung.

algebraische Zahlkörper [7] entwickelte und die eine Verfeinerung des von ihm früher [6] angegebenen Verfahrens darstellt. In den verallgemeinerten Farey-Gebieten kleinen Nenners approximieren wir in Anlehnung an Vinogradovsche Überlegungen die zu betrachtenden Primzahlsummen mit Hilfe eines Theorems (s. Hilfssatz 12) über die Verteilung der Primzahlen eines algebraischen Zahlkörpers in einer arithmetischen Progression[1]).

Im folgenden beschäftigen wir uns mit einem reell-quadratischen Zahlkörper K der Diskriminante D. Es sei H die Klassenzahl im engeren Sinne (s. § 2) und $\varepsilon > 1$ Erzeugende der Gruppe aller totalpositiven Einheiten von K. Für eine Zahl α aus K bedeute α' die zu ihr konjugierte und $N\alpha = \alpha\alpha'$ ihre Norm. Kleine deutsche Buchstaben werden für Ideale von K verwendet, und die Symbole $N\mathfrak{a}$, $\mathfrak{a} \mid \alpha$, $(\mathfrak{a}, \mathfrak{b})$, (α) haben die in der Zahlentheorie übliche Bedeutung. Eine Zahl ω aus K heißt Primzahl, wenn das von ihr erzeugte Hauptideal (ω) ein Primideal von K ist. Bezeichne durchweg λ eine totalpositive ganze Zahl aus K mit $N\lambda > 1$, r eine natürliche Zahl $\geqq 3$ und $A_r(\lambda)$ die Anzahl der Darstellungen von λ als Summe von r totalpositiven Primzahlen aus K. Hiermit läßt sich das Hauptresultat dieser Arbeit, die Rademachersche Formel, folgendermaßen fassen:

Satz 1. *Für alle λ und alle r gilt*

$$A_r(\lambda) = \frac{\sqrt{D}}{[(r-1)!]^2 (H \log \varepsilon)^r} \frac{(N\lambda)^{r-1}}{(\log N\lambda)^r} \mathfrak{S}_r(\lambda) + O\left(\frac{(N\lambda)^{r-1}}{(\log N\lambda)^{r+1}}\right).$$

Hierbei ist $\mathfrak{S}_r(\lambda)$ die zu diesem additiven Problem gehörige „singuläre Reihe", und die O-Konstante hängt nur von K und r ab.

Über die singuläre Reihe $\mathfrak{S}_r(\lambda)$ bewies RADEMACHER folgende Tatsachen:
1. Die singuläre Reihe $\mathfrak{S}_r(\lambda)$ verschwindet, wenn r und λ nicht von gleicher Parität sind.
2. Sind r und λ von gleicher Parität, so ist

$$\mathfrak{S}_r(\lambda) = 2 \cdot 2^{\left(\frac{D}{2}\right)} C_r \prod_{\mathfrak{p} \mid \lambda,\, N\mathfrak{p} > 2} \frac{(N\mathfrak{p}-1)^r + (-1)^r (N\mathfrak{p}-1)}{(N\mathfrak{p}-1)^r - (-1)^r},$$

wobei $\left(\frac{D}{2}\right)$ das Kroneckersche Restsymbol und

$$C_r = \prod_{\mathfrak{p},\, N\mathfrak{p} > 2} \left(1 - \left(\frac{-1}{N\mathfrak{p}-1}\right)^r\right)$$

ist.

Die Produkte werden über alle Primideale $\mathfrak{p}$ von K erstreckt, die die angegebenen Bedingungen erfüllen. Ferner gibt es in diesem Fall nur von K abhängige positive Konstanten c_1, c_2 mit

$$c_1 < \mathfrak{S}_r(\lambda) < c_2 .$$

Nach RADEMACHER ist der Begriff der „Parität" folgendermaßen erklärt: Sei $\mathfrak{L}$ das Produkt aller Primideale $\mathfrak{p}$ von K mit $N\mathfrak{p} = 2$ oder, falls keine solchen $\mathfrak{p}$ in K vorhanden sind, sei $\mathfrak{L} = 1$. Die Zahl λ heißt gerade, wenn $\mathfrak{L} \mid \lambda$ und ungerade, wenn $(\mathfrak{L}, \lambda) = 1$. Gleiche Parität von λ und r liegt vor,

[1]) Siehe MITSUI [2] und SCHULZ-ARENSTORFF [5].

wenn beide gerade bzw. wenn beide ungerade sind. Ist r gerade, λ nicht gerade oder r ungerade und λ nicht ungerade, so sind λ und r von ungleicher Parität[2]).

Für $r = 3$ liefert Satz 1 als Spezialfall die Aussage:

Es existiert eine nur von K abhängige Konstante $A_0 > 0$ derart, daß jede ungerade ganze totalpositive Körperzahl λ mit $N\lambda > A_0$ sich als Summe dreier totalpositiver Primzahlen aus K darstellen läßt.

Dies ist offenbar das Analogon des Goldbach-Vinogradovschen Satzes. Mit Rücksicht auf diesen Satz werden wir die Gesamtheit der ungeraden λ aus K etwas expliziter als oben angeben. Wir haben

$$\mathfrak{L} = (2) \quad \text{für} \quad D \equiv 1 \pmod 8,$$
$$\mathfrak{L} = (1) \quad \text{für} \quad D \equiv 5 \pmod 8,$$
$$\mathfrak{L}^2 = (2) \quad \text{für} \quad D \equiv 0 \pmod 4.$$

Im Falle $D \equiv 5 \pmod 8$ sind also alle ganzen Zahlen λ aus K ungerade; in den anderen Fällen muß dazu noch $(\lambda, 2) = 1$ sein. Als notwendige und hinreichende Bedingung dafür, daß λ ungerade ist, ergibt sich hieraus leicht[3]):

$$\lambda^2 \equiv 1 \left(\mathrm{mod}\, 2^{1+\left(\frac{D}{2}\right)}\right).$$

§ 1. Formale Entwicklungen und verallgemeinerte Farey-Zerschneidung

Sei θ eine fest gewählte reelle Zahl $\geqq 5$, über die wir später noch genauer verfügen wollen. Wir führen folgende Abkürzungen ein:

$$A = N\lambda, \quad a = \log A, \quad h = \sqrt{A}\, a^{-8\theta}, \quad t = a^{7\theta}.$$

Die Symbole o, O mögen sich im folgenden immer auf den Grenzübergang $A \to \infty$ beziehen, und die O-Konstanten sollen nur von K, r und θ abhängen. Nur an einer Stelle, nämlich bei Hilfssatz 12, weichen wir von dieser Konvention ab und geben dort eine andere Erklärung des O-Symbols. Für ein positives C bedeute

$$B \ll C,$$

daß $B = O(C)$ ist. Im folgenden ist es oft zweckmäßig, A als genügend groß anzunehmen (was nicht immer besonders gesagt wird), d. h. $A > A_0$, wo A_0 nur von K, r und θ abhängt. Für zwei Körperzahlen α und β bedeute

$$\alpha \prec \beta,$$

daß $\beta - \alpha$ totalpositiv ist. Für eine reelle Zahl x bezeichne $[x]$ die größte ganzrationale Zahl $\leqq x$, und es sei

$$\{x\} = \begin{cases} x - [x] & \text{für} \quad x - [x] \leqq \frac{1}{2} \\ x - [x] - 1 & \text{für} \quad x - [x] > \frac{1}{2}. \end{cases}$$

Mit einem Paar ξ, ξ' reeller Zahlen und einer Zahl α aus K bilden wir den Ausdruck

$$S(\alpha\xi) = \alpha\xi + \alpha'\xi'$$

[2]) Siehe Rademacher [3], Seite 158.

[3]) Die Bedingung in dieser Form verdanke ich einer brieflichen Mitteilung von Prof. C. L. Siegel.

und die Summe

$$T(\xi, \xi') = \sum_{0 \prec \omega \prec \lambda} e^{2\pi i S(\omega \xi)},$$

wobei ω über alle Primzahlen aus K läuft mit $0 \prec \omega \prec \lambda$. Sei ferner $\mathfrak{D}$ die Differente von K, d. h. $\mathfrak{D} = (\sqrt{D})$, und μ_1, μ_2 eine fest gewählte Basis von $\mathfrak{D}^{-1}$, etwa

$$\mu_1 = \frac{1}{\sqrt{D}}, \quad \mu_2 = \frac{1+\sqrt{D}}{2}.$$

Das zugehörige Fundamentalparallelogramm F in der reellen ξ, ξ'-Ebene E definieren wir als die Menge aller Punkte (ξ, ξ') mit

$$\begin{aligned} \xi &= r_1\mu_1 + r_2\mu_2 \\ \xi' &= r_1\mu_1' + r_2\mu_2' \end{aligned}, \quad -\tfrac{1}{2} < r_i \leqq \tfrac{1}{2}, \; i = 1, 2.$$

Dann ist nach bekannten Überlegungen[4]):

$$A_r(\lambda) = \sqrt{D} \int_F \int T^r(\xi, \xi') e^{-2\pi i S(\lambda \xi)} d\xi \, d\xi'. \tag{1}$$

Zu λ gibt es eine eindeutig bestimmte ganzrationale Zahl n mit

$$\varepsilon^{2n-1} < \frac{\lambda}{\lambda'} \leqq \varepsilon^{2n+1}, \quad \text{also} \quad \varepsilon^{-1} < \frac{\lambda \varepsilon^{-n}}{(\lambda \varepsilon^{-n})'} \leqq \varepsilon.$$

Da $A_r(\lambda) = A_r(\lambda \varepsilon^{-n})$ ist, können wir im folgenden voraussetzen, daß

$$\varepsilon^{-1} < \frac{\lambda}{\lambda'} \leqq \varepsilon, \quad \text{also} \quad \sqrt{A} \ll \frac{\lambda}{\lambda'} \ll \sqrt{A}$$

ist. Nun unterteilen wir das Integrationsgebiet F mit Hilfe der von SIEGEL verallgemeinerten Farey-Zerschneidung[5]). Für eine Zahl γ aus K sei $\mathfrak{a} = \mathfrak{a}_\gamma$ der Nenner von $\gamma\sqrt{D}$, d. h. $\mathfrak{a} = (1, \gamma\sqrt{D})^{-1}$. Wir definieren B_γ als die Menge aller Punkte (ξ, ξ') aus E mit

$$\operatorname{Max}(h\,|\xi - \gamma|, t^{-1}) \operatorname{Max}(h\,|\xi' - \gamma'|, t^{-1}) \leqq N\mathfrak{a}^{-1}.$$

Offenbar ist B_γ leer, wenn $N\mathfrak{a} > t^2$ ist. Es sei V die Vereinigungsmenge aller B_γ, wenn γ alle Zahlen aus K durchläuft. Von SIEGEL [7], Seite 125 und 126 übernehmen wir die folgenden zwei Hilfssätze:

Hilfssatz 1. *Sind γ und $\tilde{\gamma}$ zwei verschiedene Zahlen aus K, so haben B_γ und $B_{\tilde{\gamma}}$ keinen Punkt gemeinsam.*

Hilfssatz 2. *Ist (ξ, ξ') ein Punkt aus E, der nicht in V liegt, so gibt es eine ganze Zahl α aus K und eine Zahl η aus $\mathfrak{D}^{-1}$ derart, daß*

$$|\alpha\xi - \eta| < h^{-1}, \; |\alpha'\xi' - \eta'| < h^{-1}, \; 0 < |\alpha| \leqq h, \; 0 < |\alpha'| \leqq h, \tag{2}$$

$$\operatorname{Max}(h\,|\alpha\xi - \eta|, |\alpha|) \geqq D^{-1/2}, \; \operatorname{Max}(h\,|\alpha'\xi' - \eta'|, |\alpha'|) \geqq D^{-1/2}, \tag{3}$$

$$\operatorname{Max}(|\alpha|, |\alpha'|) > t, \tag{4}$$

$$N(\alpha, \eta\sqrt{D}) \leqq D^{1/2}. \tag{5}$$

[4]) Siehe RADEMACHER [3].
[5]) Siehe SIEGEL [7], Seite 125—127.

Zwei Punkte (ξ_1, ξ_1'), (ξ_2, ξ_2') aus E sollen kongruent mod $\mathfrak{D}^{-1}$ heißen, wenn $\xi_1 - \xi_2 = \tau$, $\xi_1' - \xi_2' = \tau'$ und τ aus $\mathfrak{D}^{-1}$ ist. Jeder Punkt von E ist dann mod $\mathfrak{D}^{-1}$ genau einem Punkt von F kongruent. In der Menge aller Körperzahlen γ mit $N\mathfrak{a}_\gamma \leqq t^2$ werde ein festes Restsystem mod $\mathfrak{D}^{-1}$ gewählt und mit Γ bezeichnet. Es sei

$$B = \sum_{\gamma \in \Gamma} B_\gamma .$$

Nach Hilfssatz 1 ist der Durchschnitt

$$F \cap V = \sum_{\beta \in K} F \cap B_\beta = \sum_{\gamma \in \Gamma} \Big(\sum_{\mathfrak{D}^{-1} | \tau} F \cap B_{\gamma + \tau} \Big) .$$

Die Gebiete $F \cap B_{\gamma+\tau}$ gehen durch die Translation $\xi + \tau \to \xi$, $\xi' + \tau' \to \xi'$ in die ihnen punktweise mod $\mathfrak{D}^{-1}$ kongruenten Gebiete $F_\tau \cap B_\gamma$ über, wobei F_τ das Bild von F bei dieser Translation sei. Da F Fundamentalbereich für die durch die Zahlen aus $\mathfrak{D}^{-1}$ definierte Translationsgruppe ist, so ist

$$\bigcup_{\mathfrak{D}^{-1} | \tau} (F_\tau \cap B_\gamma) = \Big(\sum_{\mathfrak{D}^{-1} | \tau} F_\tau \Big) \cap B_\gamma = B_\gamma .$$

Beachtet man noch, daß $F \cap B_\beta$ nur für endlich viele β nicht leer ist, so erkennt man, daß $F \cap V$ und B in je endlich viele Stücke zerlegt werden, die paarweise kongruent sind. Definiert man G als die Menge aller Punkte aus F, die nicht in V liegen, d. h.

$$F = F \cap V + G ,$$

so folgt also aus (1) wegen der Invarianz des Integranden gegenüber Translationen aus $\mathfrak{D}^{-1}$:

$$\begin{aligned} A_r(\lambda) = \sqrt{D} \sum_{\gamma \in \Gamma} \int\limits_{B_\gamma} \int T^r(\xi, \xi')\, e^{-2\pi i S(\lambda \xi)} d\xi\, d\xi' + \\ + \sqrt{D} \int\limits_{G} \int T^r(\xi, \xi')\, e^{-2\pi i S(\lambda \xi)}\, d\xi\, d\xi' . \end{aligned} \tag{6}$$

Der Beweis von Satz 1 läuft nun wie folgt weiter: In § 2 bis § 4 befassen wir uns mit der Abschätzung von $T(\xi, \xi')$ in G. Das Ergebnis dieser Untersuchungen ist Satz 2. In § 5 leiten wir eine Approximation für $T(\xi, \xi')$ in den B_γ her, die in Satz 3 formuliert ist. In § 6 benutzen wir die über $T(\xi, \xi')$ erhaltenen Aussagen, um die Integrale in (6) auszuwerten und damit den Beweis des Hauptsatzes abzuschließen.

§ 2. Vorbereitungen zur Abschätzung von $T(\xi, \xi')$

Zu einem ganzen Ideal $\mathfrak{b}$ aus K definieren wir die Summe

$$T_\mathfrak{b}(\xi, \xi') = \sum_{\substack{\mathfrak{b} | \beta \\ 0 \prec \beta \prec \lambda}} e^{2\pi i S(\beta \xi)} .$$

Hilfssatz 3. *Sei $\mathfrak{h}$ das Produkt aller Primideale $\mathfrak{p}$ von K mit $N\mathfrak{p} \leqq \sqrt{A}$, $\mu(\mathfrak{b})$ die Möbiussche μ-Funktion für Ideale. Dann gilt*

$$T(\xi, \xi') = \sum_{\mathfrak{b} | \mathfrak{h}} \mu(\mathfrak{b})\, T_\mathfrak{b}(\xi, \xi') + O\big(\sqrt{A}\big) .$$

Beweis[6]):

$$\sum_{\mathfrak{b}|\mathfrak{h}} \mu(\mathfrak{b})\, T_{\mathfrak{b}}(\xi, \xi') = \sum_{\mathfrak{b}|\mathfrak{h}} \mu(\mathfrak{b}) \sum_{\substack{\mathfrak{b}|\beta \\ 0 \prec \beta \prec \lambda}} e^{2\pi i S(\beta\xi)}$$

$$= \sum_{\substack{1|\beta \\ 0 \prec \beta \prec \lambda}} e^{2\pi i S(\beta\xi)} \sum_{\mathfrak{b}|(\beta, \mathfrak{h})} \mu(\mathfrak{b}) = \sum_{\substack{1|\beta \\ 0 \prec \beta \prec \lambda \\ (\beta, \mathfrak{h}) = 1}} e^{2\pi i S(\beta\xi)} = T(\xi, \xi') + O\left(\sqrt{A}\right).$$

q. e. d.

Zunächst untersuchen wir die Summen $T_{\mathfrak{b}}(\xi, \xi')$. Es empfiehlt sich, in K die Idealklassen im engeren Sinne zu betrachten, d. h. wir nennen zwei Ideale $\mathfrak{a}$ und $\mathfrak{b}$ von K äquivalent im engeren Sinne (in Symbolen: $\mathfrak{a} \sim \mathfrak{b}$), wenn eine totalpositive Zahl $\varkappa$ aus K existiert derart, daß

$$\mathfrak{a}\mathfrak{b}^{-1} = (\varkappa)$$

ist.

Normiert man $\varkappa$ noch durch die Bedingung

$$\varepsilon^{-1} < \frac{\varkappa}{\varkappa'} \leqq \varepsilon\,,$$

so ist $\varkappa$ eindeutig durch $\mathfrak{a}$ und $\mathfrak{b}$ bestimmt. In jeder Klasse äquivalenter Ideale werde ein festes ganzes Ideal $\mathfrak{c}$ gewählt. Die Gesamtheit der Ideale $\mathfrak{c}$ werde mit $\mathfrak{M}$ bezeichnet. $\mathfrak{M}$ ist also eine nur von K (und unserer Festsetzung) abhängige Idealmenge, die aus genau H Elementen besteht. Die Auswahl der $\mathfrak{c}$ sei so getroffen worden, daß auch das Einheitsideal (1) unter ihnen vorkommt.

Nach dieser Festsetzung gibt es also zu jedem Ideal $\mathfrak{b} \neq (0)$ von K genau ein $\mathfrak{c}$ aus $\mathfrak{M}$ mit

$$\mathfrak{b} \sim \mathfrak{c}^{-1}$$

und damit genau ein $\varkappa$ aus K mit

$$\mathfrak{b}\mathfrak{c} = (\varkappa),\ \varkappa \succ 0,\ \varepsilon^{-1} < \frac{\varkappa}{\varkappa'} \leqq \varepsilon\,.$$

Umgekehrt ist auch $\mathfrak{b}$ durch das Paar $\mathfrak{c}, \varkappa$ eindeutig bestimmt. Diese eineindeutige Zuordnung des Paares $\mathfrak{c}, \varkappa$ zu $\mathfrak{b}$ wollen wir durch die Symbole

$$\mathfrak{c} = p(\mathfrak{b}),\ \varkappa = q(\mathfrak{b})$$

ausdrücken. Somit haben wir für jedes ganze Ideal $\mathfrak{b} \neq (0)$:

$$T_{\mathfrak{b}}(\xi, \xi') = \sum_{\substack{\mathfrak{c}^{-1}|\varrho \\ 0 \prec \varrho \prec \frac{\lambda}{\varkappa}}} e^{2\pi i S(\varrho\varkappa\xi)}\,, \tag{7}$$

wobei $\mathfrak{c} = p(\mathfrak{b}),\ \varkappa = q(\mathfrak{b})$.

Für spätere Anwendungen (s. (23)) sei noch notiert, daß für ganze $\mathfrak{b}$ das Ideal $\mathfrak{c}$ die Zahl $\varkappa$ teilt, also $\varkappa$ ganz ist. Von den Inversen aller Ideale $\mathfrak{c}$ aus $\mathfrak{M}$ werde nun je eine Basis τ_1, τ_2 fest ausgewählt. (In Symbolen: $[\tau_1, \tau_2] = \mathfrak{c}^{-1}$.). Sei β eine Zahl aus K und $[\tau_1, \tau_2] = \mathfrak{c}^{-1}$, $\mathfrak{c} \in \mathfrak{M}$. Dann gibt es ganzrationale Zahlen a_i $(i = 1, 2)$ mit

$$S(\tau_i \beta \xi) = a_i + d_i\,,\quad d_i = \{S(\tau_i \beta \xi)\}\,,\quad i = 1, 2\,.$$

[6]) Vergleiche hiermit VINOGRADOV [10], Seite 30, Lemma 2.

Mit der zu τ_1, τ_2 komplementären Basis σ_1, σ_2 — d. h.

$$S(\tau_i \sigma_k) = \begin{matrix} 1 & \text{für} & i = k \\ 0 & \text{für} & i \neq k \end{matrix}, \quad i, k = 1, 2$$

— definieren wir

$$\nu = \nu(\beta, \mathfrak{c}) = a_1\sigma_1 + a_2\sigma_2 ,$$
$$\zeta = \zeta(\beta, \mathfrak{c}) = d_1\sigma_1 + d_2\sigma_2 , \quad \zeta' = \zeta'(\beta, \mathfrak{c}) = d_1\sigma_1' + d_2\sigma_2' .$$

Nach Konstruktion von ν und ζ gilt

$$\beta\xi = \nu + \zeta , \quad \beta'\xi' = \nu' + \zeta' , \quad \mathfrak{c}\mathfrak{D}^{-1} | \nu , \tag{8}$$

und es gibt eine nur von K abhängige Konstante $c_3 \geqq 1$ mit

$$|\zeta| \leqq c_3 , \quad |\zeta'| \leqq c_3 \tag{9}$$

für alle β aus K und alle $\mathfrak{c} \in \mathfrak{M}$; denn es ist $|d_i| \leqq \frac{1}{2}$ und σ_1, σ_2 mit τ_1, τ_2 festgelegt.

Hilfssatz 4. *Für jedes ganze Ideal $\mathfrak{b}$ von K mit $1 \leqq N\mathfrak{b} \leqq A$ gilt*

$$T_{\mathfrak{b}}(\xi, \xi') \ll X_{\mathfrak{c}}(\varkappa) ,$$

wobei

$$X_{\mathfrak{c}}(\varkappa) = \operatorname{Min}\left(\frac{A}{N\varkappa}, \sqrt{\frac{A}{N\varkappa}}\frac{1}{|\zeta|}, \sqrt{\frac{A}{N\varkappa}}\frac{1}{|\zeta'|}, \sqrt{\frac{A}{N\varkappa}}\frac{1}{\sqrt{|\zeta\zeta'|}}\right)$$

und

$$\mathfrak{c} = p(\mathfrak{b}), \varkappa = q(\mathfrak{b}), \zeta = \zeta(\varkappa, \mathfrak{c}), \zeta' = \zeta'(\varkappa, \mathfrak{c})$$

sei.

Beweis[7]: Sei $[\tau_1, \tau_2] = \mathfrak{c}^{-1}$, $d_i = \{S(\tau_i \varkappa \xi)\}$, dann folgt nach (7):

$$T_{\mathfrak{b}}(\xi, \xi')\, e^{2\pi i S(\tau_i \varkappa \xi)} = \sum_{\substack{\mathfrak{c}^{-1} | \varrho \\ 0 < \varrho - \tau_i < \frac{\lambda}{\varkappa}}} e^{2\pi i S(\varrho \varkappa \xi)} = T_{\mathfrak{b}}(\xi, \xi') + O\left(\sqrt{\frac{A}{N\varkappa}}\right).$$

Denn das Restglied ist höchstens von der Größenordnung des Umfanges des Rechtecks, das aus allen Punkten (x, x') besteht mit

$$0 < x < \frac{\lambda}{\varkappa} , \quad 0 < x' < \frac{\lambda'}{\varkappa'} .$$

Also folgt mit der trivialen Abschätzung

$$T_{\mathfrak{b}}(\xi, \xi') \ll \frac{A}{N\varkappa}$$

und mit $\zeta, \zeta' \ll \operatorname{Max}(|d_1|, |d_2|)$ die Beziehung

$$T_{\mathfrak{b}}(\xi, \xi') \ll \operatorname{Min}\left(\frac{A}{N\varkappa}, \sqrt{\frac{A}{N\varkappa}}\frac{1}{|e^{2\pi i d_1} - 1|}, \sqrt{\frac{A}{N\varkappa}}\frac{1}{|e^{2\pi i d_2} - 1|}\right) \ll$$

$$\ll \operatorname{Min}\left(\frac{A}{N\varkappa}, \sqrt{\frac{A}{N\varkappa}}\frac{1}{|d_1|}, \sqrt{\frac{A}{N\varkappa}}\frac{1}{|d_2|}\right) \ll \operatorname{Min}\left(\frac{A}{N\varkappa}, \sqrt{\frac{A}{N\varkappa}}\frac{1}{|\zeta|}, \sqrt{\frac{A}{N\varkappa}}\frac{1}{|\zeta'|}\right)$$
$$= X_{\mathfrak{c}}(\varkappa) . \qquad \text{q. e. d.}$$

[7]) Siehe Siegel [7], Seite 129, (25).

In diesem und den beiden nächsten Paragraphen setzen wir voraus, daß (ξ, ξ') beliebig, aber fest aus G gewählt sei. Seien α und η die nach Hilfssatz 2 zu (ξ, ξ') existierenden Zahlen. Ohne Beschränkung der Allgemeinheit unserer Überlegungen können wir annehmen, daß $|\alpha| \leqq |\alpha'|$ ist.

Hilfssatz 5. *Seien L_1, L_2, b reelle Zahlen, $L = L_2 - L_1$ und b positiv, g, g' ein Paar ganzrationaler Zahlen und $\mathfrak{c}_1, \mathfrak{c}_2$ zwei Ideale aus $\mathfrak{M}$. Ferner sei $\mathfrak{B}$ eine Menge von Zahlen β, die in $\mathfrak{c}_1^{-1}$ liegen und folgende Bedingungen erfüllen:*

$$\begin{aligned} g - \tfrac{1}{2} &\leqq 2\sqrt{D N\mathfrak{c}_1}\,|\alpha|\,\zeta(\beta, \mathfrak{c}_2) < g + \tfrac{1}{2}\,, \\ g' - \tfrac{1}{2} &\leqq 2\sqrt{D N\mathfrak{c}_1}\,|\alpha'|\,\zeta'(\beta, \mathfrak{c}_2) < g' + \tfrac{1}{2}\,, \end{aligned} \tag{10}$$

$$L_1 \leqq \beta \leqq L_2\,, \quad L_1 \leqq \beta' \leqq L_2\,, \tag{11}$$

und für zwei beliebige Zahlen $\beta, \tilde{\beta}$ aus $\mathfrak{B}$ gelte

$$|\zeta(\beta, \mathfrak{c}_2) - \zeta(\tilde{\beta}, \mathfrak{c}_2)| \leqq b\,.$$

Dann haben wir für die Anzahl $Z(g, g', b)$ aller Zahlen aus $\mathfrak{B}$ die Abschätzung

$$Z(g, g', b) \ll \frac{L^2 a^2}{|N\alpha|} + 1 \tag{12}$$

und für den Fall $|\alpha| < D^{-1/2}$ noch die weitere

$$Z(g, g', b) \ll \left(\frac{L}{|\alpha'|} + \frac{L^2 a^2}{h|\alpha'|} + 1\right)(hb + 1)\,. \tag{13}$$

Beweis: Durch (11) wird in E ein abgeschlossenes Quadrat Q der Seitenlänge L definiert. Jede Seite von Q teilen wir in m gleiche Teile, wobei $m = 1 + \left[\frac{L}{ha^{-1}}\right]$ sei. Dadurch wird Q in m^2 verschiedene Quadrate Q' der Seitenlänge $\frac{L}{m} \ll ha^{-1}$ zerlegt. Bezeichne $Z(Q')$ die Anzahl der β aus $\mathfrak{B}$, die in einem abgeschlossenen Q' liegen (d. h. $(\beta, \beta') \in Q'$ abgeschlossen). Dann ist offenbar

$$Z(g, g', b) \leqq m^2 \operatorname*{Max}_{Q'} Z(Q')\,. \tag{14}$$

Sei $\tilde{\beta}$ eines von diesen β aus Q'. Setzt man

$$\begin{aligned} &\delta = \alpha\xi - \eta\,, \quad \delta' = \alpha'\xi' - \eta'\,, \quad \tilde{\zeta} = \zeta(\tilde{\beta}, \mathfrak{c}_2)\,, \quad \tilde{\zeta}' = \zeta'(\tilde{\beta}, \mathfrak{c}_2)\,, \\ &\nu = \nu(\beta, \mathfrak{c}_2)\,, \quad \tilde{\nu} = \nu(\tilde{\beta}, \mathfrak{c}_2) \quad \text{und} \quad \varrho = \alpha(\nu - \tilde{\nu}) - \eta(\beta - \tilde{\beta})\,, \end{aligned}$$

so erhält man nach (8):

$$\varrho = \delta(\beta - \tilde{\beta}) - \alpha(\zeta - \tilde{\zeta}) \tag{15}$$

und nach (10):

$$|\alpha(\zeta - \tilde{\zeta})| < \tfrac{1}{2}(D N\mathfrak{c}_1)^{-1/2}\,, \quad |\alpha'(\zeta' - \tilde{\zeta}')| < \tfrac{1}{2}(D N\mathfrak{c}_1)^{-1/2}\,, \tag{16}$$

und nach (2) ergibt sich

$$|\delta(\beta - \tilde{\beta})| < h^{-1}\frac{L}{m} = o(1)\,, \quad |\delta'(\beta' - \tilde{\beta}')| < h^{-1}\frac{L}{m} = o(1)\,.$$

Hieraus folgt mit (15) und (16):

$$|\varrho| < (D\,N\mathfrak{c}_1)^{1/2}, \quad |\varrho'| < (D\,N\mathfrak{c}_1)^{-1/2}.$$

Also ist $\varrho = 0$, da $(\mathfrak{D}\,\mathfrak{c}_1)^{-1} | \varrho$. Somit gilt

$$\delta(\beta - \tilde{\beta}) = \alpha(\zeta - \tilde{\zeta}), \quad \delta'(\beta' - \tilde{\beta}') = \alpha'(\zeta' - \tilde{\zeta}') , \tag{17}$$

$$\eta(\beta - \tilde{\beta}) = \alpha(\nu - \tilde{\nu}), \quad \eta'(\beta' - \tilde{\beta}') = \alpha'(\nu' - \tilde{\nu}') . \tag{18}$$

Aus (18) folgt, daß α ein Teiler von $(\beta - \tilde{\beta})\,\eta\,\sqrt{D}$ ist. Nach (5) existiert dann eine nur von K abhängige natürliche Zahl v derart, daß

$$\frac{\alpha}{v} \mid (\beta - \tilde{\beta}) . \tag{19}$$

Aus (19) folgt zunächst, daß $Z(Q')$ höchstens gleich der Anzahl aller Zahlen $\varkappa$ aus K ist mit

$$\frac{\alpha}{v} \mid \varkappa, \quad |\varkappa| \leqq \frac{L}{m}, \quad |\varkappa'| \leqq \frac{L}{m} .$$

Also

$$Z(Q') \ll \frac{L^2}{m^2 |N\alpha|} + 1 . \tag{20}$$

Andererseits ist $Z(Q')$ nach (17) und (19) höchstens gleich der Anzahl aller ganzen $\varkappa$ aus K mit

$$|\varkappa| \leqq v \max_{\beta, \tilde{\beta} \in \mathfrak{B}} \left| \frac{\zeta - \tilde{\zeta}}{\delta} \right|, \quad |\varkappa'| \leqq \frac{v}{|\alpha'|} \frac{L}{m} .$$

Beachtet man, daß im Falle $|\alpha| < D^{1/2}$ nach (3) die Abschätzung $\delta^{-1} = O(h)$ gilt, so erhält man hier

$$Z(Q') \ll (hb + 1)\left(\frac{L}{|\alpha'| m} + 1\right). \tag{21}$$

Aus (2), (14), (20) und (21) folgt die Behauptung des Hilfssatzes 5. Wir fügen noch hinzu, daß, falls $\mathfrak{B}$ nicht leer ist, nach (9) und (10) gilt

$$|g| \ll |\alpha| + 1, \quad |g'| \ll |\alpha'| .$$

Hilfssatz 6. *Es gilt*

$$\sum_{(g, g')} \frac{1}{\sqrt{g g'}} < 2\sqrt{1 + \log l}\,\sqrt{l} ,$$

wenn über irgendwelche $l (l \geqq 1)$ verschiedenen Paare (g, g') natürlicher Zahlen summiert wird.

Beweis: Die l verschiedenen Paare lassen sich folgendermaßen darstellen:

$$(g, g') = (g_\nu, g_{\nu\mu})$$

mit

$$g_1 < g_2 < \cdots < g_n, \quad g_{\nu 1} < g_{\nu 2} < \cdots < g_{\nu r_\nu} \quad (\nu = 1, 2, \ldots, n), \quad \sum_{\nu=1}^{n} r_\nu = l .$$

Also

$$\sum_{(g,g')} \frac{1}{\sqrt{gg'}} \leqq \sum_{\nu=1}^{n} \frac{1}{\sqrt{\nu}} \left(\sum_{\mu=1}^{r_\nu} \frac{1}{\sqrt{g_{\nu\mu}}} \right) \leqq \sum_{\nu=1}^{n} \frac{1}{\sqrt{\nu}} \left(\sum_{\mu=1}^{r_\nu} \frac{1}{\sqrt{\mu}} \right) <$$

$$< 2 \sum_{\nu=1}^{n} \frac{1}{\sqrt{\nu}} \sqrt{r_\nu} \leqq 2 \sqrt{\sum_{\nu=1}^{n} \frac{1}{\nu}} \sqrt{\sum_{\nu=1}^{n} r_\nu} \leqq 2 \sqrt{1 + \log n}\, \sqrt{l} \leqq$$

$$\leqq 2 \sqrt{1 + \log l}\, \sqrt{l}\,. \qquad \text{q. e. d.}$$

Nach diesen Vorbereitungen zerlegen wir gemäß Hilfssatz 3 die Summe $T(\xi, \xi')$ wie folgt:

$$T(\xi, \xi') = S_1 + S_2 + O\left(\sqrt{A}\right), \tag{22}$$

wobei

$$S_1 = \sum_{\substack{\mathfrak{b} \mid \mathfrak{h} \\ N\mathfrak{b} \leqq A a^{-2\theta}}} \mu(\mathfrak{b})\, T_{\mathfrak{b}}(\xi, \xi')\,, \quad S_2 = \sum_{\substack{\mathfrak{b} \mid \mathfrak{h} \\ A a^{-2\theta} < N\mathfrak{b} < A}} \mu(\mathfrak{b})\, T_{\mathfrak{b}}(\xi, \xi')$$

ist.

§ 3. Die Abschätzung von S_1 in G

Nach (7) und Hilfssatz 4 ergibt sich

$$|S_1| = \Big| \sum_{\mathfrak{c} \in \mathfrak{M}} \sum_{\substack{\mathfrak{c}^{-1} \sim \mathfrak{b} \mid \mathfrak{h} \\ N\mathfrak{b} \leqq A a^{-2\theta}}} \mu(\mathfrak{b})\, T_{\mathfrak{b}}(\xi, \xi') \Big| \leqq \sum_{\mathfrak{c} \in \mathfrak{M}} \sum_{\substack{1 \mid \mathfrak{b} \sim \mathfrak{c}^{-1} \\ N\mathfrak{b} \leqq A a^{-2\theta}}} |T_{\mathfrak{b}}(\xi, \xi')| \ll \tag{23}$$

$$\ll \sum_{\mathfrak{c} \in \mathfrak{M}} \left(\sum_{\varkappa \in \mathfrak{N}} X_{\mathfrak{c}}(\varkappa) \right).$$

Hierbei sei $\mathfrak{N}$ die Menge aller ganzen $\varkappa$ aus K mit

$$\varkappa > 0,\ \varepsilon^{-1} < \frac{\varkappa}{\varkappa'} \leqq \varepsilon,\ N\varkappa \leqq N\mathfrak{c}\, A a^{-2\theta}.$$

Hilfssatz 7. *Für alle* $\mathfrak{c}$ *aus* $\mathfrak{M}$ *und alle* $\varkappa$ *aus* $\mathfrak{N}$ *mit* $N\varkappa \leqq t^2$ *gilt*

$$\operatorname{Max}(|\zeta(\varkappa, \mathfrak{c})|, |\zeta'(\varkappa, \mathfrak{c})|) > \frac{1}{\sqrt{\varepsilon}\, h}.$$

Beweis: Nach (8) ist

$$\xi = \frac{\nu}{\varkappa} + \frac{\zeta}{\varkappa}, \quad \xi' = \frac{\nu'}{\varkappa'} + \frac{\zeta'}{\varkappa'}.$$

Da $\mathfrak{D}^{-1} \mid \nu$ und (ξ, ξ') außerhalb $B_{\frac{\nu}{\varkappa}}$ liegt, ist

$$\operatorname{Max}\left(\left|\frac{\zeta}{\varkappa}\right|, \left|\frac{\zeta'}{\varkappa'}\right| \right) > \frac{1}{h\sqrt{N\varkappa}}, \quad \text{also} \quad \operatorname{Max}(|\zeta|, |\zeta'|) > \frac{1}{\sqrt{\varepsilon}\, h}. \qquad \text{q. e. d.}$$

Wie durch (23) nahegelegt wird, halten wir im folgenden das Ideal $\mathfrak{c}$ aus $\mathfrak{M}$ fest. Wir haben

$$\sum_{\varkappa \in \mathfrak{N}} X_{\mathfrak{c}}(\varkappa) \leqq \sum_{\substack{\varkappa \in \mathfrak{N} \\ N\varkappa \leqq t^2}} X_{\mathfrak{c}}(\varkappa) + \sum_{s} \left(\sum_{\substack{\varkappa \in \mathfrak{N} \\ \varepsilon^{2s+1} \leqq N\varkappa \leqq \varepsilon^{2s+3}}} X_{\mathfrak{c}}(\varkappa) \right) \leqq R + \sum_{s} R_s. \tag{24}$$

Hierbei laufe s jeweils über alle natürlichen Zahlen s mit

$$\varepsilon^{-3} t^2 < U^2 \leqq \varepsilon^{-1} N\mathfrak{c}\, A a^{-2\theta}, \quad \text{wobei} \quad U = \varepsilon^s \quad \text{sei}, \tag{25}$$

und es sei definiert:

$$R = \sum_{\substack{\varkappa \in \mathfrak{N} \\ N\varkappa \leqq t^2}} X_{\mathfrak{c}}(\varkappa)\,, \quad R_s = \sum_{\varkappa \in \mathfrak{B}_s} X_{\mathfrak{c}}(\varkappa)\,,$$

wobei $\mathfrak{B}_s$ die Menge aller ganzen $\varkappa$ aus K sei mit

$$U \leqq \varkappa \leqq \varepsilon^2 U\,, \quad U \leqq \varkappa' \leqq \varepsilon^2 U\,.$$

Nach Hilfssatz 7 läßt sich R folgendermaßen abschätzen:

$$R < \sum_{\substack{\varkappa \in \mathfrak{N} \\ N\varkappa \leqq t^2}} \sqrt{\frac{A}{N\varkappa}}\,\sqrt{\varepsilon}\,h \ll \sqrt{A}\,ht = A a^{-\theta}\,. \tag{26}$$

Bei der Abschätzung von R_s benutzen wir Hilfssatz 5 in der Spezialisierung

$$\mathfrak{c}_1 = (1)\,, \quad \mathfrak{c}_2 = \mathfrak{c}\,, \quad L = (\varepsilon^2 - 1)\,U\,.$$

Die Zahlenpaare (g, g') mögen die in Hilfssatz 5 angegebene Rolle spielen. Dann ist offenbar

$$\begin{aligned} R_s &= \sum_{\substack{\varkappa \in \mathfrak{B}_s \\ g = g' = 0}} X_{\mathfrak{c}}(\varkappa) + \sum_{\substack{\varkappa \in \mathfrak{B}_s \\ g = 0,\, g' \neq 0}} X_{\mathfrak{c}}(\varkappa) + \sum_{\substack{\varkappa \in \mathfrak{B}_s \\ g \neq 0,\, g' = 0}} X_{\mathfrak{c}}(\varkappa) + \sum_{\substack{\varkappa \in \mathfrak{B}_s \\ g g' \neq 0}} X_{\mathfrak{c}}(\varkappa) \\ &= R_s^{(1)} + R_s^{(2)} + R_s^{(3)} + R_s^{(4)}\,. \end{aligned}$$

Wir treffen folgende Fallunterscheidung:

Fall I: $|\alpha| \geqq \dfrac{1}{4 c_3 \sqrt{D}}$.

Im einzelnen folgt bei Beachtung von (12), (2), (4) und (25):

$$R_s^{(1)} \leqq Z(0, 0, 2c_3)\,\frac{A}{U^2} \ll \left(\frac{U^2 a^2}{|N\alpha|} + 1\right)\frac{A}{U^2} \ll \frac{A a^2}{t} \ll A a^{3-\theta}\,,$$

$$R_s^{(2)} \ll \sum_{0 < |g'| \ll |\alpha'|} Z(0, g', 2c_3)\,\frac{\sqrt{A}}{U}\,\frac{|\alpha'|}{|g'|} \ll \left(\frac{U^2 a^2}{|N\alpha|} + 1\right)\frac{\sqrt{A}}{U}\,|\alpha'|\,a \ll$$

$$\ll (U^2 a^2 + |\alpha'|)\,\frac{\sqrt{A}}{U}\,a \ll A a^{3-\theta}\,,$$

$$R_s^{(3)} \ll \sum_{0 < |g| \ll |\alpha|} Z(g, 0, 2c_3)\,\frac{\sqrt{A}}{U}\,\frac{|\alpha|}{|g|} \ll \left(\frac{U^2 a^2}{|N\alpha|} + 1\right)\frac{\sqrt{A}}{U}\,|\alpha|\,a \ll A a^{3-\theta}\,,$$

$$R_s^{(4)} \ll \sum_{\substack{0 < |g| \ll |\alpha| \\ 0 < |g'| \ll |\alpha'|}} Z(g, g', 2c_3)\,\frac{\sqrt{A}}{U}\,\sqrt{\frac{|N\alpha|}{|g g'|}}\,.$$

Hier ist zu bemerken, daß für höchstens $O(\mathrm{Min}(|N\alpha|, U^2))$ verschiedene Zahlenpaare (g, g') die Größe $Z(g, g', 2c_3)$ nicht verschwindet; denn wegen $|g| \ll |\alpha|$, $|g'| \ll |\alpha'|$ gibt es höchstens $O(|N\alpha|)$ solche Zahlenpaare, und andererseits enthält $\mathfrak{B}_s$ höchstens $O(U^2)$ Elemente $\varkappa$. Also können wir mit Hilfssatz 6 und (12) weiterschließen:

$$R_s^{(4)} \ll \left(\frac{U^2 a^2}{|N\alpha|} + 1\right)\frac{\sqrt{A}}{U}\,\sqrt{|N\alpha|}\,\mathrm{Min}\left(\sqrt{|N\alpha|}\,, U\right)\sqrt{a} \ll$$

$$\ll U a^2 \sqrt{A}\,\sqrt{a} + \sqrt{A}\,\sqrt{|N\alpha|}\,\sqrt{a} \ll A a^{3-\theta}\,.$$

Fall II: $|\alpha| < \dfrac{1}{4c_3\sqrt{D}}$.

In diesem Fall sind nach (9) und (10) die Summen $R_s^{(3)}$ und $R_s^{(4)}$ leer. Bei Anwendung von (13) erhalten wir

$$R_s^{(1)} \leqq \sum_{0 \leqq l \leqq \left[\frac{\log h}{\log 2}\right]} \left(\sum_{\substack{\varkappa \in \mathfrak{B}_s \\ g = g' = 0 \\ c_3 2^{-l-1} < |\zeta| \leqq c_3 2^{-l}}} X_c(\varkappa) \right) + \sum_{\substack{\varkappa \in \mathfrak{B}_s \\ g = g' = 0 \\ |\zeta| \leqq c_3 h^{-1}}} X_c(\varkappa)$$

$$\ll \sum_{0 \leqq l \leqq \left[\frac{\log h}{\log 2}\right]} Z(0, 0, c_3 2^{-l+1}) \frac{\sqrt{A}}{U} 2^l + Z(0, 0, 2c_3 h^{-1}) \frac{A}{U^2}$$

$$\ll \sum_{0 \leqq l \leqq \left[\frac{\log h}{\log 2}\right]} \left(\frac{U}{|\alpha'|} + \frac{U^2 a^2}{h|\alpha'|} + 1 \right) \frac{h}{2^l} \frac{\sqrt{A}}{U} 2^l + \left(\frac{U}{|\alpha'|} + \frac{U^2 a^2}{h|\alpha'|} + 1 \right) \frac{A}{U^2}$$

$$\ll a \left(\frac{U}{|\alpha'|} + \frac{U^2 a^2}{h|\alpha'|} + 1 \right) h \frac{\sqrt{A}}{U} + \left(\frac{U}{|\alpha'|} + \frac{U^2 a^2}{h|\alpha'|} + 1 \right) \frac{A}{U^2} \ll A a^{3-\theta},$$

$$R_s^{(2)} \leqq \sum_{1 \leqq n \leqq [c_3 |\alpha'|]} \left(\sum_{\substack{\varkappa \in \mathfrak{B}_s \\ g = 0, g' \neq 0 \\ n|\alpha'|^{-1} \leqq \zeta < (n+1)|\alpha'|^{-1}}} X_c(\varkappa) + \sum_{\substack{\varkappa \in \mathfrak{B}_s \\ g = 0, g' \neq 0 \\ (n+1)|\alpha'|^{-1} < \zeta \leqq n|\alpha'|^{-1}}} X_c(\varkappa) \right) +$$

$$+ \sum_{\substack{\varkappa \in \mathfrak{B}_s \\ g = 0, g' \neq 0 \\ |\zeta| \leqq |\alpha'|^{-1}}} X_c(\varkappa)$$

$$\ll \sum_{1 \leqq n \leqq [c_3 |\alpha'|]} \sum_{0 < |g'| \ll |\alpha'|} (Z^{(n)}(0, g', |\alpha'|^{-1}) + Z^{(-n)}(0, g', |\alpha'|^{-1})) \frac{\sqrt{A}}{U} \frac{|\alpha'|}{\sqrt{n|g'|}} +$$

$$+ \sum_{0 < |g'| \ll |\alpha'|} Z(0, g', 2|\alpha'|^{-1}) \frac{\sqrt{A}}{U} \frac{|\alpha'|}{|g'|}.$$

Der obere Index i bei $Z^{(i)}(0, g', |\alpha'|^{-1})$ soll hier die Zugehörigkeit von $Z(0, g', |\alpha'|^{-1})$ zu einer von i abhängigen Zahlenmenge bezeichnen. Wir stellen wieder fest, daß wir wegen $n \ll |\alpha'|$, $g' \ll |\alpha'|$ über höchstens $O(\mathrm{Min}(|\alpha'|^2, U^2))$ verschiedene Paare (n, g') zu summieren haben und erhalten deshalb mit Hilfssatz 6 und (13):

$$R_s^{(2)} \ll \left(\frac{U}{|\alpha'|} + \frac{U^2 a^2}{h|\alpha'|} + 1 \right) \frac{h}{|\alpha'|} \frac{\sqrt{A}}{U} |\alpha'| \,\mathrm{Min}(|\alpha'|, U) \sqrt{a} +$$

$$+ \left(\frac{U}{|\alpha'|} + \frac{U^2 a^2}{h|\alpha'|} + 1 \right) \frac{h}{|\alpha'|} \frac{\sqrt{A}}{U} |\alpha'| a \ll A a^{3-\theta}.$$

Sowohl im Fall I als auch im Fall II ist also

$$R_s \ll A a^{3-\theta}. \tag{27}$$

Bei Beachtung von: $s \ll a$ und der Tatsache, daß $\mathfrak{M}$ nur H Elemente enthält, folgt aus (23), (24), (26) und (27):

$$S_1 \ll A a^{4-\theta}. \tag{28}$$

§ 4. Die Abschätzung von S_2 in G

Sei $\theta_1 = 12\theta + 6$, $\mathfrak{P}$ die Menge aller Primideale $\mathfrak{p}$ von K mit $a^{\theta_1} < N\mathfrak{p} \leq \sqrt{A}$ und $\mathfrak{Q}_k$ die Menge aller ganzen Ideale $\mathfrak{q}$, die $\mathfrak{h}$ teilen und genau k Primteiler mit Norm $> a^{\theta_1}$ besitzen. Dann wird

$$S_2 = \sum_{k=0}^{\infty} W_k\,, \quad W_k = \sum_{\substack{\mathfrak{b} \in \mathfrak{Q}_k \\ A a^{-2\theta} < N\mathfrak{b} < A}} \mu(\mathfrak{b})\, T_{\mathfrak{b}}(\xi, \xi')\,. \tag{29}$$

Hilfssatz 8. *Es ist $W_k = 0$ für $k \geqq a$.*

Beweis: Sei $\mathfrak{b}$ ein Ideal aus $\mathfrak{Q}_k$ mit $N\mathfrak{b} < A$. Dann ist $a^{\theta_1 k} < A$, also $k < a$. Somit ist W_k für $k \geqq a$ leer.

Hilfssatz 9. *Für die Anzahl Z_0 aller Ideale $\mathfrak{b}$ aus $\mathfrak{Q}_0$ mit $A a^{-2\theta} < N\mathfrak{b} < A$ gilt*

$$Z_0 \ll A a^{-\theta_1}\,.$$

Beweis: Sei $\mathfrak{b}$ ein Ideal aus $\mathfrak{Q}_0$ mit $A a^{-2\theta} < N\mathfrak{b} < A$ und s die Zahl seiner Primteiler. Dann ist

$$(a^{\theta_1})^s > A a^{-2\theta}$$

und folglich für genügend großes A:

$$s > \frac{a - 2\theta \log a}{\theta_1 \log a} > \frac{a}{2\theta_1 \log a}\,.$$

Deshalb ist die Zahl $\tau(\mathfrak{b})$ der Teiler jedes solchen $\mathfrak{b}$:

$$\tau(\mathfrak{b}) = 2^s > 2^{\frac{a}{2\theta_1 \log a}} = A^{\frac{\log 2}{2\theta_1 \log a}} > A^{\frac{1}{3\theta_1 \log a}}\,.$$

Mit der bekannten Abschätzung

$$\sum_{N\mathfrak{b} < A} \tau(\mathfrak{b}) \ll A a$$

erhalten wir

$$Z_0\, A^{\frac{1}{3\theta_1 \log a}} \ll A a = A a^{-\theta_1} A^{\frac{1}{3\theta_1 \log a}} a^{\theta_1 + 1} A^{-\frac{1}{3\theta_1 \log a}} \ll A a^{-\theta_1} A^{\frac{1}{3\theta_1 \log a}}\,. \text{ q.e.d.}$$

Nach Hilfssatz 4 und 9 haben wir also für W_0:

$$W_0 \ll \sum_{\substack{\mathfrak{b} \in \mathfrak{Q}_0 \\ A a^{-2\theta} < N\mathfrak{b} < A}} \frac{A}{N\mathfrak{b}} < Z_0 a^{2\theta} \ll A a^{2\theta - \theta_1}\,. \tag{30}$$

Weiterhin sei $k > 0$. Bildet man sämtliche Produkte $\mathfrak{p}\mathfrak{q}$ mit $\mathfrak{p} \in \mathfrak{P}$, $\mathfrak{q} \in \mathfrak{Q}_{k-1}$, so entsteht jedes $\mathfrak{b}$ aus $\mathfrak{Q}_k$ genau k-mal und im Fall $k > 1$ noch jedes Produkt $\mathfrak{p}^2\mathfrak{r}$ mit $\mathfrak{p} \in \mathfrak{P}$, $\mathfrak{r} \in \mathfrak{Q}_{k-2}$, $\mathfrak{p} \nmid \mathfrak{r}$ genau einmal. Setzt man

$$V_k = \sum_{\substack{\mathfrak{p} \in \mathfrak{P},\, \mathfrak{q} \in \mathfrak{Q}_{k-1} \\ A a^{-2\theta} < N(\mathfrak{p}\mathfrak{q}) < A}} \mu(\mathfrak{q})\, T_{\mathfrak{p}\mathfrak{q}}(\xi, \xi') \qquad (k = 1, 2, 3, \ldots)\,,$$

so folgt mit Hilfssatz 4:

$$\begin{aligned} |k W_k + V_k| &\leqq \sum_{\mathfrak{p} \in \mathfrak{P}} \sum_{\substack{\mathfrak{r} \\ A a^{-2\theta} < N(\mathfrak{p}^2\mathfrak{r}) < A}} |T_{\mathfrak{p}^2\mathfrak{r}}(\xi, \xi')| \ll \sum_{\mathfrak{p} \in \mathfrak{P}} \sum_{\substack{\mathfrak{r} \\ N\mathfrak{r} < A}} \frac{A}{N\mathfrak{p}^2 N\mathfrak{r}} \\ &\ll \sum_{\mathfrak{p} \in \mathfrak{P}} \frac{A a}{N\mathfrak{p}^2} \ll A a^{1-\theta_1}\,, \end{aligned} \tag{31}$$

und es bleibt V_k abzuschätzen. Gemäß der Zerlegung

$$V_k = \sum_{\mathfrak{c} \in \mathfrak{M}} V_{k,\mathfrak{c}}\,, \quad V_{k,\mathfrak{c}} = \sum_{\substack{\mathfrak{p} \in \mathfrak{P} \\ \mathfrak{p} \sim \mathfrak{c}^{-1}}} \sum_{\substack{\mathfrak{q} \in \mathfrak{Q}_{k-1} \\ A a^{-2\vartheta} < N(\mathfrak{p}\mathfrak{q}) < A}} \mu(\mathfrak{q})\, T_{\mathfrak{p}\mathfrak{q}}(\xi, \xi') \tag{32}$$

genügt es, $\mathfrak{p}$ auf die Klasse des festen Ideals $\mathfrak{c}^{-1}$ zu beschränken. Nach den Überlegungen in § 2 gilt somit

$$V_{k,\mathfrak{c}} = \sum_{\varkappa, \mathfrak{q}} \mu(\mathfrak{q}) \left(\sum_{\substack{0 < \varrho < \frac{\lambda}{\varkappa} \\ \mathfrak{q}\mathfrak{c}^{-1} | \varrho}} e^{2\pi i S(\varrho \varkappa \xi)} \right).$$

Hierbei wird summiert über alle $\varkappa$ mit

$$(\varkappa)\, \mathfrak{c}^{-1} \in \mathfrak{P}\,, \quad \varkappa > 0\,, \quad \varepsilon^{-1} < \frac{\varkappa}{\varkappa'} \leqq \varepsilon\,,$$

und zu gegebenem $\varkappa$ durchläuft $\mathfrak{q}$ alle Ideale aus $\mathfrak{Q}_{k-1}$ mit

$$A a^{-2\vartheta} N\mathfrak{c} (N\varkappa)^{-1} < N\mathfrak{q}\,.$$

Nun wird (vergleiche den analogen Schluß bei (24))

$$V_{k,\mathfrak{c}} = \sum_{s} C_s\,, \quad |C_s| \leqq \sum_{\varkappa} \Big| \sum_{\mathfrak{q}, \varrho} \mu(\mathfrak{q})\, e^{2\pi i S(\varrho \varkappa \xi)} \Big|\,. \tag{33}$$

Dabei läuft s über alle natürlichen Zahlen s mit

$$\varepsilon^{-3} N\mathfrak{c}\, a^{\vartheta_1} < U^2 \leqq \varepsilon^{-1} N\mathfrak{c} \sqrt{A}\,, \quad U = \varepsilon^s$$

und $\varkappa$ über alle ganzen Körperzahlen mit

$$U \leqq \varkappa \leqq \varepsilon^2 U\,, \quad U \leqq \varkappa' \leqq \varepsilon^2 U\,,$$

und in der inneren Summe läuft $\mathfrak{q}$ über alle Ideale aus $\mathfrak{Q}_{k-1}$ mit Norm $> A a^{-2\vartheta} N\mathfrak{c} (N\varkappa)^{-1}$, sowie ϱ über alle Körperzahlen mit

$$\mathfrak{q}\mathfrak{c}^{-1} | \varrho\,, \quad 0 < \varrho < \frac{\lambda}{\varkappa}\,.$$

Nach der Schwarzschen Ungleichung ist

$$C_s^2 \ll U^2 \sum_{\mathfrak{q}_1, \mathfrak{q}_2, \varrho_1, \varrho_2} \Big| \sum_{\varkappa} e^{2\pi i S(\varkappa(\varrho_1 - \varrho_2)\xi)} \Big|\,. \tag{34}$$

Hierbei wird summiert über alle Quadrupel $(\mathfrak{q}_1, \mathfrak{q}_2, \varrho_1, \varrho_2)$ mit

$$\begin{gathered} \mathfrak{q}_j \in \mathfrak{Q}_{k-1}\,, \quad N\mathfrak{q}_j > A a^{-2\vartheta} N\mathfrak{c} (\varepsilon^4 U^2)^{-1}\,, \quad \mathfrak{q}_j \mathfrak{c}^{-1} | \varrho_j\,, \\ 0 < \varrho_j < \frac{\lambda}{U}\,, \quad 0 < \varrho_j' < \frac{\lambda'}{U}\,, \quad (j = 1, 2)\,, \end{gathered} \tag{35}$$

und innen läuft $\varkappa$ über alle ganzen Körperzahlen mit

$$U \leqq \varkappa \leqq \varepsilon^2 U\,, \quad U \leqq \varkappa' \leqq \varepsilon^2 U\,, \quad 0 < \varkappa < \frac{\lambda}{\varrho_j}\,, \quad N\varkappa > \frac{A a^{-2\vartheta} N\mathfrak{c}}{N\mathfrak{q}_j}\,, \quad (j = 1, 2)\,. \tag{36}$$

Der Punkt $(\varkappa, \varkappa')$ liegt also in einem Gebiet $\mathfrak{G}$, definiert durch (36), der Ebene E, das durch eine Hyperbel von einem Rechteck abgeschnitten wird. Die Länge des Randes von $\mathfrak{G}$ ist $O(U)$. Der Beweis von Hilfssatz 4 überträgt sich fast wörtlich auf

Hilfssatz 10. *Für eine beliebige Zahl σ aus K gilt*

$$\sum_{\substack{1|\varkappa \\ (\varkappa,\varkappa')\in\mathfrak{G}}} e^{2\pi i S(\varkappa\sigma\,\xi)} \ll Y(\sigma)\,,$$

wobei

$$Y(\sigma) = \mathrm{Min}\left(U^2, \frac{U}{|\zeta|}, \frac{U}{|\zeta'|}, \frac{U}{\sqrt{|\zeta\zeta'|}}\right)$$

und

$$\zeta = \zeta(\sigma,(1))\,, \quad \zeta' = \zeta'(\sigma,(1))$$

sei.

Hilfssatz 11. *Zu einer gegebenen Zahl σ aus K gilt für die Anzahl Z_1 aller verschiedenen Quadrupel $(\mathfrak{q}_1, \mathfrak{q}_2, \varrho_1, \varrho_2)$, die die Bedingungen (35) und die Gleichung*

$$\sigma = \varrho_1 - \varrho_2$$

erfüllen:

$$Z_1 \ll \frac{A a^{4\theta}}{U^2}\,.$$

Beweis: Die Anzahl der verschiedenen Paare (ϱ_1, ϱ_2), die (35) und $\sigma = \varrho_1 - \varrho_2$ befriedigen, ist wegen

$$\mathfrak{c}^{-1}|\varrho_j\,, \quad 0 < \varrho_j < \frac{\lambda}{U}\,, \quad 0 < \varrho_j' < \frac{\lambda'}{U}\,, \quad (j = 1, 2)$$

höchstens von der Größenordnung $O\left(\frac{A}{U^2}\right)$. Zu gegebenem ϱ_j ist die Anzahl der $\mathfrak{q}_j$ höchstens $O(a^{2\theta})$. Jedem solchen $\mathfrak{q}_j$ entspricht nämlich nach (35) eineindeutig ein ganzes Ideal $\mathfrak{u}$ mit $(\varrho_j)\mathfrak{c} = \mathfrak{q}_j\mathfrak{u}$, und die Anzahl der verschiedenen $\mathfrak{u}$ ist wegen

$$1 \leqq N\mathfrak{u} = \frac{N(\varrho_j\mathfrak{c})}{N\mathfrak{q}_j} \ll a^{2\theta}$$

höchstens $O(a^{2\theta})$. Hieraus folgt die Behauptung des Hilfssatzes.

Nach (34), Hilfssatz 10 und 11 haben wir also

$$C_s^2 \ll A a^{4\theta} M_s\,, \quad M_s = \sum_{\sigma\in\mathfrak{C}_s} Y(\sigma)\,, \tag{37}$$

wobei $\mathfrak{C}_s$ die Menge aller Zahlen σ aus $\mathfrak{c}^{-1}$ sei mit

$$|\sigma| < W\,, \quad |\sigma'| < W\,, \quad W = \mathrm{Max}\left(\frac{\lambda}{U}, \frac{\lambda'}{U}\right). \tag{38}$$

Die Abschätzung von M_s verläuft nun völlig analog zu der von R_s in § 3. Wir wenden Hilfssatz 5 an in der Spezialisierung

$$\mathfrak{c}_1 = \mathfrak{c}\,, \quad \mathfrak{c}_2 = (1)\,, \quad L = 2W$$

und zerlegen:

$$\begin{aligned} M_s &= \sum_{\substack{\sigma\in\mathfrak{C}_s \\ g=g'=0}} Y(\sigma) + \sum_{\substack{\sigma\in\mathfrak{C}_s \\ g=0,\,g'\neq 0}} Y(\sigma) + \sum_{\substack{\sigma\in\mathfrak{C}_s \\ g\neq 0,\,g'=0}} Y(\sigma) + \sum_{\substack{\sigma\in\mathfrak{C}_s \\ gg'\neq 0}} Y(\sigma) \\ &= M_s^{(1)} + M_s^{(2)} + M_s^{(3)} + M_s^{(4)}\,. \end{aligned}$$

Wir treffen folgende Fallunterscheidung:

Fall I: $|\alpha| \geqq \frac{1}{4c_3\sqrt{DN\mathfrak{c}}}$.

Mit (12), (2), (4) und (38) folgt:

$$M_s^{(1)} \ll Z(0,0,2c_3)\,U^2 \ll \left(\frac{W^2a^2}{|N\alpha|}+1\right)U^2 \ll \frac{Aa^2}{t} \ll Aa^{-6\theta},$$

$$M_s^{(2)} \ll \sum_{0<g'\ll\alpha'} Z(0,g',2c_3)\,U\,\frac{|\alpha'|}{|g'|} \ll \left(\frac{W^2a^2}{|N\alpha|}+1\right)U\,|\alpha'|\,a \ll Aa^{-6\theta},$$

$$M_s^{(3)} \ll \sum_{0<g\ll\alpha} Z(g,0,2c_3)\,U\,\frac{|\alpha|}{|g|} \ll \left(\frac{W^2a^2}{|N\alpha|}+1\right)U\,|\alpha|\,a \ll Aa^{-6\theta},$$

$$M_s^{(4)} \ll \sum_{\substack{0<g\ll\alpha\\ 0<g'\ll\alpha'}} Z(g,g',2c_3)\,U\sqrt{\frac{|N\alpha|}{|gg'|}}.$$

Hier ist wiederum zu bemerken, daß man wegen (38) und $|g| \ll |\alpha|$, $|g'| \ll |\alpha'|$ höchstens über $O(\mathrm{Min}(|N\alpha|, W^2))$ verschiedene Paare (g, g') zu summieren braucht. Nach Hilfssatz 6 und (12) erhalten wir somit

$$\begin{aligned} M_s^{(4)} &\ll \left(\frac{W^2a^2}{|N\alpha|}+1\right)U\sqrt{|N\alpha|}\,\mathrm{Min}\left(\sqrt{|N\alpha|}, W\right)\sqrt{a} \\ &\ll W^2a^2U\sqrt{a} + U\sqrt{|N\alpha|}\,W\sqrt{a} \ll Aa^{-6\theta}. \end{aligned}$$

Fall II: $|\alpha| < \frac{1}{4c_3\sqrt{DN\mathfrak{c}}}$.

In diesem Fall sind nach (9) und (10) die Summen $M_s^{(3)}$ und $M_s^{(4)}$ leer. Bei Anwendung von (13) erhalten wir

$$\begin{aligned} M_s^{(1)} &\leqq \sum_{0\leqq l\leqq\left[\frac{\log h}{\log 2}\right]} \left(\sum_{\substack{\sigma\in\mathfrak{S}_s\\ g=g'=0\\ c_3 2^{-l-1}<\zeta\leqq c_3 2^{-l}}} Y(\sigma)\right) + \sum_{\substack{\sigma\in\mathfrak{S}_s\\ g=g'=0\\ \zeta\leqq c_3 h^{-1}}} Y(\sigma) \\ &\ll \sum_{0\leqq l\leqq\left[\frac{\log h}{\log 2}\right]} Z(0,0,c_3 2^{-l+1})\,U\,2^l + Z(0,0,2c_3h^{-1})\,U^2 \\ &\ll \sum_{0\leqq l\leqq\left[\frac{\log h}{\log 2}\right]} \left(\frac{W}{|\alpha'|}+\frac{W^2a^2}{h|\alpha'|}+1\right)\frac{h}{2^l}\,U\,2^l + \left(\frac{W}{|\alpha'|}+\frac{W^2a^2}{h|\alpha'|}+1\right)U^2 \\ &\ll a\left(\frac{W}{|\alpha'|}+\frac{W^2a^2}{h|\alpha'|}+1\right)hU + \left(\frac{W}{|\alpha'|}+\frac{W^2a^2}{h|\alpha'|}+1\right)U^2 \ll Aa^{-6\theta}, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} M_s^{(2)} &\leqq \sum_{1\leqq n\leqq[c_3\alpha'^{-1}]} \left(\sum_{\substack{\sigma\in\mathfrak{S}_s\\ g=0,g'\neq 0\\ n\alpha'^{-1}\leqq\zeta<(n+1)\alpha'^{-1}}} Y(\sigma) + \sum_{\substack{\sigma\in\mathfrak{S}_s\\ g=0,g'\neq 0\\ -(n+1)\alpha'^{-1}<\zeta\leqq -n\alpha'^{-1}}} Y(\sigma)\right) + \\ &\quad + \sum_{\substack{\sigma\in\mathfrak{S}_s\\ g=0,g'\neq 0\\ \zeta\leqq\alpha'^{-1}}} Y(\sigma) \\ &\ll \sum_{1\leqq n\leqq[c_3\alpha'^{-1}]} \sum_{0<g'\ll\alpha'} (Z^{(n)}(0,g',|\alpha'|^{-1}) + Z^{(-n)}(0,g',|\alpha'|^{-1}))\,\frac{U|\alpha'|}{\sqrt{n|g'|}} + \\ &\quad + \sum_{0<g'\ll\alpha'} Z(0,g',2|\alpha'|^{-1})\,U\,\frac{|\alpha'|}{|g'|}. \end{aligned}$$

Wir haben hier wegen (38) und $n \ll |\alpha'|, g' \ll |\alpha'|$ über höchstens $O(\mathrm{Min}(|\alpha'|^2, W^2))$ verschiedene Paare (n, g') zu summieren und erhalten mit Hilfssatz 6 und (13):

$$M_s^{(2)} \ll \left(\frac{W}{|\alpha'|} + \frac{W^2 a^2}{h|\alpha'|} + 1\right) \frac{h}{|\alpha'|} U |\alpha'| \,\mathrm{Min}(|\alpha'|, W) \sqrt{a} + \\ + \left(\frac{W}{|\alpha'|} + \frac{W^2 a^2}{h|\alpha'|} + 1\right) \frac{h}{|\alpha'|} U |\alpha'| a$$

$$\ll \left(W + \frac{W^2 a^2}{h}\right) h U \sqrt{a} + \left(\frac{W}{|\alpha'|} + \frac{W^2 a^2}{h|\alpha'|} + 1\right) h U a \ll A a^{-6\vartheta}.$$

Somit haben wir sowohl im Fall I als auch im Fall II:

$$M_s \ll A a^{-6\vartheta}.$$

Hieraus folgt nach (37):

$$C_s \ll A a^{-\vartheta}$$

und damit aus (32) und (33) wegen $s \ll a$:

$$V_k \ll A a^{1-\vartheta}$$

und weiter aus (31):

$$W_k \ll \frac{1}{k} A a^{1-\vartheta} \quad \text{für alle} \quad k > 0. \tag{39}$$

Dann ergeben (29), Hilfssatz 8, (30) und (39):

$$S_2 \ll A a^{2-\vartheta}. \tag{40}$$

Nach (22), (28) und (40) haben wir damit folgenden Satz bewiesen:

Satz 2. *Für alle Punkte (ξ, ξ') aus G gilt:*

$$T(\xi, \xi') \ll A a^{4-\vartheta}.$$

§ 5. Die Approximation von $T(\xi, \xi')$ in B_γ

Hilfssatz 12. *Seien b_1, b_2 zwei beliebige, aber fest gewählte reelle Zahlen mit $b_1 \geqq 1$, $b_2 > 0$ und Y, Y' ein Paar reeller Zahlen mit*

$$Y \geqq 2, \quad Y' \geqq 2, \quad Y \leqq (Y')^{b_1}, \quad Y' \leqq (Y)^{b_1}.$$

Ferner sei $\mathfrak{b}$ ein ganzes Ideal von K mit $N\mathfrak{b} \leqq \log^{b_2}(Y Y')$ und ϱ eine ganze zu $\mathfrak{b}$ teilerfremde Zahl aus K. Bezeichne $\varphi(\mathfrak{b})$ die Eulersche Funktion für Ideale und $\pi(\mathfrak{b}, \varrho, Y, Y')$ die Anzahl aller totalpositiven Primzahlen ω in K mit

$$\omega \equiv \varrho \bmod \mathfrak{b}, \quad \omega < Y, \quad \omega' < Y'.$$

Dann gilt mit einer positiven Konstanten c:

$$\pi(\mathfrak{b}, \varrho, Y, Y') = \frac{1}{H \log^\varepsilon \varphi(\mathfrak{b})} \int_2^Y \int_2^{Y'} \frac{du\, du'}{\log(uu')} + O\left(Y Y' e^{-c\sqrt{\log(YY')}}\right).$$

Das O-Zeichen bezieht sich auf den Grenzübergang $Y Y' \to \infty$, wobei die O-Konstante und c nur von b_1, b_2 und K, aber nicht von $\mathfrak{b}$ und ϱ abhängen.

Dies ist der für unsere Zwecke umgeschriebene und spezialisierte Satz von Mitsui [2], Seite 35[8]).

[8]) Siehe auch Schulz-Arenstorff [5].

Im folgenden sei (ξ, ξ') aus B_γ, $\mathfrak{a} = \mathfrak{a}_\gamma$, $N\mathfrak{a} \leqq t^2$, $z = \xi - \gamma$, $z' = \xi' - \gamma'$ und F_γ die Menge aller dieser Punkte (z, z'), d. h. das Gebiet, das durch die Translation $\gamma \to 0$, $\gamma' \to 0$ aus B_γ hervorgeht. F_γ enthält das Quadrat

$$|z| \leqq (ht)^{-1}, \quad |z'| \leqq (ht)^{-1} \tag{41}$$

und ist enthalten in dem Quadrat

$$|z| \leqq (ht^{-1})^{-1}, \quad |z'| \leqq (ht^{-1})^{-1}. \tag{42}$$

Offenbar gilt

$$T(\xi, \xi') = \sum_{\substack{0 < \omega < \lambda \\ (\omega, \mathfrak{a}) = 1}} e^{2\pi i S(\omega\xi)} + O\left(\sum_{\substack{0 < \omega < \lambda \\ \omega | \mathfrak{a}}} 1\right).$$

Bezüglich der Abschätzung des Restgliedes ist zu bemerken, daß $\mathfrak{a}$ höchstens $O(\log N\mathfrak{a})$ verschiedene Primidealteiler besitzt und ein solcher Primidealteiler (ω) von höchstens $O(a)$ verschiedenen Primzahlen ω mit $0 < \omega < \lambda$ erzeugt werden kann. Wir können also schreiben:

$$T(\xi, \xi') = \sum_{\substack{0 < \omega < \lambda \\ (\omega, \mathfrak{a}) = 1}} e^{2\pi i S(\omega\xi)} + O(a \log N\mathfrak{a}). \tag{43}$$

Sei $\theta_2 = 60\theta$. Die auf der rechten Seite von (43) stehende Summe teilen wir auf in Untersummen folgender Gestalt:

$$T(\xi, \xi')_{s, s'} = \sum_{\substack{s \leqq \omega < s_1 \\ s' \leqq \omega' < s_1' \\ (\omega, \mathfrak{a}) = 1}} e^{2\pi i S(\omega\xi)}.$$

Hierbei sei s ein Element der Zahlenreihe

$$\left(0, 2, \sqrt{A}\, a^{-\theta_2}, 2\sqrt{A}\, a^{-\theta_2}, 3\sqrt{A}\, a^{-\theta_2}, \ldots, \left[\frac{\lambda}{\sqrt{A}\, a^{-\theta_2}}\right]\sqrt{A}\, a^{-\theta_2}, \lambda\right),$$

und s' sei aus

$$\left(0, 2, \sqrt{A}\, a^{-\theta_2}, 2\sqrt{A}\, a^{-\theta_2}, 3\sqrt{A}\, a^{-\theta_2}, \ldots, \left[\frac{\lambda'}{\sqrt{A}\, a^{-\theta_2}}\right]\sqrt{A}\, a^{-\theta_2}, \lambda'\right).$$

Sei s_1 bzw. s_1' das auf s bzw. s' in diesen Zahlenreihen als nächstes folgende Element. Die Anzahl der Summen $T(\xi, \xi')_{s, s'}$ ist höchstens $O(a^{2\theta_2})$. Jedes $T(\xi, \xi')_{s, s'}$ können wir wiederum in der Form

$$T(\xi, \xi')_{s, s'} = \sum_{\tau} T(\xi, \xi')_{s, s', \tau}$$

darstellen. Hierbei bezeichne $T(\xi, \xi')_{s, s', \tau}$ den Teil von $T(\xi, \xi')_{s, s'}$, der zu den Werten $\omega \equiv \tau \bmod \mathfrak{a}$ gehört, und summiert werde über alle zu $\mathfrak{a}$ teilerfremden ganzen τ eines vollständigen Restsystems $\bmod \mathfrak{a}$. Die Anzahl $U_{s, s'}$ der Primzahlen ω, die die Bedingungen

$$s \leqq \omega < s_1, \quad s' \leqq \omega' < s_1', \quad \omega \equiv \tau \bmod \mathfrak{a}, \quad s \geqq 2, \quad s' \geqq 2$$

erfüllen, ist nach Hilfssatz 12:

$$U_{s, s'} = \frac{1}{H \log \varepsilon\, \varphi(\mathfrak{a})} \int_s^{s_1} \int_{s'}^{s_1'} \frac{du\, du'}{\log(uu')} + O\left(A e^{-c\sqrt{a}}\right), \tag{44}$$

wobei die O-Konstante und c wegen $N\mathfrak{a} \leqq t^2$ nur von K und θ abhängen. Mit (42) erhalten wir

$$\begin{aligned} e^{2\pi i S(\omega z)} - e^{2\pi i(sz+s'z')} &\ll |s_1 - s|\,|z| + |s_1' - s'|\,|z'| \\ &\ll \sqrt{A}\; a^{-\theta_2}(|z| + |z'|) \ll a^{-\frac{3}{4}\theta_2}. \end{aligned} \tag{45}$$

Aus (44) und (45) folgt für $s \geqq 2$, $s' \geqq 2$:

$$\begin{aligned} T(\xi,\xi')_{s,s',\tau} = {} & \frac{1}{H \log\varepsilon\; \varphi(\mathfrak{a})} \int_s^{s_1}\int_{s'}^{s_1'} \frac{du\,du'}{\log(uu')}\, e^{2\pi i S(\tau\gamma)+2\pi i(sz+s'z')} + \\ & + O\left(\frac{1}{\varphi(\mathfrak{a})}\int_s^{s_1}\int_{s'}^{s_1'} \frac{du\,du'}{\log(uu')}\, a^{-\frac{3}{4}\theta_2} + A e^{-c\sqrt{a}}\right). \end{aligned} \tag{46}$$

Im Integrationsgebiet des Integrals von (46) vollziehen wir die zu (45) analoge Abschätzung

$$e^{2\pi i(sz+s'z')} - e^{2\pi i(uz+u'z')} \ll a^{-\frac{3}{4}\theta_2}$$

und erhalten damit für $s, s' \geqq 2$ aus (46):

$$\begin{aligned} T(\xi,\xi')_{s,s',\tau} = {} & \frac{e^{2\pi i S(\tau\gamma)}}{H \log\varepsilon\; \varphi(\mathfrak{a})} \int_s^{s_1}\int_{s'}^{s_1'} \frac{e^{2\pi i(uz+u'z')}}{\log(uu')}\, du\,du' + \\ & + O\left(\frac{1}{\varphi(\mathfrak{a})}\int_s^{s_1}\int_{s'}^{s_1'} \frac{du\,du'}{\log(uu')}\, a^{-\frac{3}{4}\theta_2} + A e^{-c\sqrt{a}}\right). \end{aligned}$$

Da

$$\sum_{\substack{\tau \bmod \mathfrak{a} \\ (\tau,\mathfrak{a})=1}} e^{2\pi i S(\tau\gamma)} = \mu(\mathfrak{a})$$

ist[9]), ergibt die Summation über die τ:

$$\begin{aligned} T(\xi,\xi')_{s,s'} = {} & \frac{\mu(\mathfrak{a})}{H \log\varepsilon\; \varphi(\mathfrak{a})} \int_s^{s_1}\int_{s'}^{s_1'} \frac{e^{2\pi i(uz+u'z')}}{\log(uu')}\, du\,du' + \\ & + O\left(\int_s^{s_1}\int_{s'}^{s_1'} \frac{du\,du'}{\log(uu')}\, a^{-\frac{3}{4}\theta_2} + A e^{-c\sqrt{a}}\, t^2\right) \text{ für } s, s' \geqq 2. \end{aligned}$$

Für $s < 2$ oder $s' < 2$ schätzen wir $T(\xi,\xi')_{s,s'}$ trivial ab durch

$$T(\xi,\xi')_{s,s'} \ll \sqrt{A}\,.$$

Nach Summation über alle Paare s, s' erhalten wir hiermit nach (43):

$$\begin{aligned} T(\xi,\xi') = {} & \frac{\mu(\mathfrak{a})}{H \log\varepsilon\; \varphi(\mathfrak{a})} \int_2^{\lambda}\int_2^{\lambda'} \frac{e^{2\pi i(uz+u'z')}}{\log(uu')}\, du\,du' + \\ & + O\left(\int_2^{\lambda}\int_2^{\lambda'} \frac{du\,du'}{\log(uu')}\, a^{-\frac{3}{4}\theta_2} + A e^{-c\sqrt{a}}\, t^2 a^{2\theta_2}\right), \end{aligned}$$

[9]) Siehe Rademacher [3], Seite 116, (1.515).

und hieraus folgt mit der trivialen Abschätzung

$$\int_2^\lambda \int_2^{\lambda'} \frac{du\,du'}{\log(uu')} \ll A$$

der folgende Satz:

Satz 3. *Für alle* (ξ, ξ') *aus* B_γ *gilt*

$$T(\xi, \xi') = \frac{\mu(\mathfrak{a})}{H \log\varepsilon\, \varphi(\mathfrak{a})} J(z, z') + O\left(A a^{-\frac{3}{4}\theta_2}\right),$$

wobei

$$J(z, z') = \int_2^\lambda \int_2^{\lambda'} \frac{e^{2\pi i(uz+u'z')}}{\log(uu')}\, du\, du'$$

sei.

§ 6. Die Auswertung der Integrale und der Beweis des Hauptsatzes

Hilfssatz 13[10]. *Für alle reellen* $u' \geqq 1$ *und alle reellen* z *mit* $|z| \leq A^{-1/4}$ *ist*

$$\int_2^\lambda \frac{e^{2\pi iuz}}{\log(uu')}\, du \ll \mathrm{Min}\left(\frac{\sqrt{A}}{a}, \frac{1}{a|z|}\right).$$

Beweis: Wir führen den Beweis in zwei Schritten.

1. $$\int_2^\lambda \frac{e^{2\pi iuz}}{\log(uu')}\, du \ll \int_2^\lambda \frac{du}{\log u} \ll \frac{\sqrt{A}}{a}.$$

2. $$\int_2^\lambda \frac{e^{2\pi iuz}}{\log(uu')}\, du = \int_2^{\sqrt{\lambda}} \frac{e^{2\pi iuz}}{\log(uu')}\, du + \int_{\sqrt{\lambda}}^\lambda \frac{e^{2\pi iuz}}{\log(uu')}\, du$$

$$\ll \int_2^{\sqrt{\lambda}} \frac{du}{\log u} + \left| \left[\frac{e^{2\pi iuz}}{2\pi i z \log(uu')} \right]_{\sqrt{\lambda}}^\lambda + \int_{\sqrt{\lambda}}^\lambda \frac{e^{2\pi iuz}\, du}{2\pi i u z \log^2(uu')} \right|$$

$$\ll \frac{A^{1/4}}{a} + \frac{1}{a|z|} + \frac{1}{|z|} \int_{\sqrt{\lambda}}^\lambda \frac{du}{u \log^2 u} \ll \frac{1}{a|z|} \quad \text{für} \quad |z| \leq A^{-1/4}. \quad \text{q. e. d.}$$

Hilfssatz 14. *Sei*

$$L(z, z') = \int_2^\lambda \int_2^{\lambda'} \frac{e^{2\pi i(uz+u'z')}}{a}\, du\, du'.$$

Dann gelten folgende Abschätzungen:

$$L(z, z') \ll \mathrm{Min}\left(\frac{A}{a}, \frac{\sqrt{A}}{a|z|}, \frac{\sqrt{A}}{a|z'|}, \frac{1}{a|zz'|}\right) \tag{47}$$

für alle reellen z, z'.

$$J(z, z') \ll \mathrm{Min}\left(\frac{A}{a}, \frac{\sqrt{A}}{a|z|}, \frac{\sqrt{A}}{a|z'|}, \frac{1}{a|zz'|}\right) \tag{48}$$

für alle reellen z, z' *mit* $|z| \leq A^{-3/8}$, $|z'| \leq A^{-3/8}$.

[10]) Siehe VINOGRADOV [10], Seite 37.

Beweis: Die Abschätzung (47) ist trivial. (48) wird in zwei Schritten bewiesen.

1. $$J(z,z') \ll \int_2^{\lambda'} du' \left| \int_2^{\lambda} \frac{e^{2\pi i u z}}{\log(uu')}\, du \right| \ll \sqrt{A}\ \mathrm{Min}\left(\frac{\sqrt{A}}{a}, \frac{1}{a|z|}\right),$$

wie aus Hilfssatz 13 für $|z| \leqq A^{-1/4}$ folgt. Ebenso erhält man

$$J(z,z') \ll \mathrm{Min}\left(\frac{A}{a}, \frac{\sqrt{A}}{a|z'|}\right) \quad \text{für} \quad |z'| \leqq A^{-1/4}.$$

2.

$$J(z,z') \ll \left| \int_{\substack{2\ 2 \\ \mathrm{Min}(u,u') \leqq A^{1/4}}}^{\lambda\ \lambda'} \right| + \left| \int_{\substack{2\ 2 \\ \mathrm{Min}(u,u') > A^{1/4}}}^{\lambda\ \lambda'} \right| \ll \frac{A^{3/4}}{a} + \left| \int_{A^{1/4}}^{\lambda} \int_{A^{1/4}}^{\lambda'} \frac{e^{2\pi i(uz+u'z')}}{\log(uu')}\, du\, du' \right|$$

$$= \frac{A^{3/4}}{a} + \left| \int_{A^{1/4}}^{\lambda} du\, e^{2\pi i u z} \left(\left[\frac{e^{2\pi i u' z'}}{2\pi i z' \log(uu')} \right]_{A^{1/4}}^{\lambda'} + \int_{A^{1/4}}^{\lambda'} \frac{e^{2\pi i u' z'}\, du'}{2\pi i\, u' z' \log^2(uu')} \right) \right|$$

$$\ll \frac{A^{3/4}}{a} + \frac{1}{|z'|} \left| \int_{A^{1/4}}^{\lambda} \frac{e^{2\pi i u z}}{\log(u\lambda')}\, du \right| + \frac{1}{|z'|} \left| \int_{A^{1/4}}^{\lambda} \frac{e^{2\pi i u z}\, du}{\log(uA^{1/4})} \right| +$$

$$+ \left| \int_{A^{1/4}}^{\lambda} \int_{A^{1/4}}^{\lambda'} \frac{e^{2\pi i(uz+u'z')}\, du\, du'}{2\pi i u' z' \log^2(uu')} \right|$$

$$\ll \frac{A^{3/4}}{a} + \frac{1}{a|zz'|} + \left| \int_{A^{1/4}}^{\lambda'} \frac{e^{2\pi i u' z'}}{2\pi i u' z'}\, du' \left(\left[\frac{e^{2\pi i u z}}{2\pi i z \log^2(uu')} \right]_{A^{1/4}}^{\lambda} + \right. \right.$$

$$\left. \left. + 2 \int_{A^{1/4}}^{\lambda} \frac{e^{2\pi i u z}\, du}{2\pi i u z \log^3(uu')} \right) \right|$$

$$\ll \frac{A^{3/4}}{a} + \frac{1}{a|zz'|} + \frac{1}{|zz'|} \int_{A^{1/4}}^{\lambda'} \frac{du'}{u' \log^2(Au')} + \frac{1}{|zz'|} \int_{A^{1/4}}^{\lambda} \int_{A^{1/4}}^{\lambda'} \frac{du\, du'}{uu' \log^3(uu')}$$

$$\ll \frac{A^{3/4}}{a} + \frac{1}{a|zz'|} \ll \frac{1}{a|zz'|} \quad \text{für} \quad |z| \leqq A^{-3/8},\ |z'| \leqq A^{-3/8}.$$

Hilfssatz 15. *Für natürliches $k \geqq 2$ und reelles $d > 0$ gilt*

$$\frac{1}{2\pi i} \int_{d-i\infty}^{d+i\infty} \frac{e^{uv}}{v^k}\, dv = \begin{cases} \dfrac{u^{k-1}}{(k-1)!} & \text{für} \quad u > 0 \\ 0 & \text{für} \quad u \leqq 0. \end{cases}$$

Beweis: Die Behauptung ergibt sich durch direkte Anwendung des Residuensatzes.

Hilfssatz 16. *Für natürliches $k \geqq 2$ und reelles $u > 2k$ gilt*

$$I = \int_{-\infty}^{\infty} \left(\frac{e^{2\pi i u v} - e^{2\pi i 2v}}{2\pi i v} \right)^k e^{-2\pi i u v}\, dv = \frac{(u-2k)^{k-1}}{(k-1)!}.$$

Beweis: Verschiebt man den Integrationsweg von I parallel zu sich selbst um die Strecke 1 in die obere v-Halbebene, so ändert sich I wegen der Holomorphie des Integranden nach dem Cauchyschen Integralsatz nicht, da die Integrale über die im Unendlichen gelegenen vertikalen Wegstücke verschwinden. Also

$$I = \int_{-\infty+i}^{\infty+i} \left(\frac{e^{2\pi i(u-2)v}-1}{2\pi i v}\right)^k e^{-2\pi i(u-2k)v}\,dv$$

$$= \frac{1}{2\pi i}\int_{2\pi-i\infty}^{2\pi+i\infty} \left(\frac{1-e^{-(u-2)w}}{w}\right)^k e^{(u-2k)w}\,dw$$

$$= \sum_{r=0}^{k}(-1)^r\binom{k}{r}\frac{1}{2\pi i}\int_{2\pi-i\infty}^{2\pi+i\infty} e^{((u-2k)-r(u-2))w}\,\frac{dw}{w^k} = \frac{(u-2k)^{k-1}}{(k-1)!}.$$

wie durch Anwendung von Hilfssatz 15 auf die einzelnen Summanden folgt.

Mit den Bezeichnungen des § 5 folgt aus Satz 3:

$$T^r(\xi,\xi') = \frac{1}{(H\log\varepsilon)^r}\left(\frac{\mu(a)}{\varphi(a)}\right)^r J^r(z,z') + O\left(A^r a^{-\frac{3}{4}r\theta_2} + \frac{A^{r-1}}{\varphi(a)^{r-1}}A a^{-\frac{3}{4}\theta_2}\right)$$

$$= \frac{1}{(H\log\varepsilon)^r}\left(\frac{\mu(a)}{\varphi(a)}\right)^r J^r(z,z') + O\left(\frac{A^r a^{-\frac{3}{4}\theta_2}}{\varphi(a)^{r-1}}\right).$$

Die Integration über B_γ bei Benutzung von (42) und die nachfolgende Summation über alle γ aus Γ ergeben

$$\sum_{\gamma\in\Gamma}\int_{B_\gamma}\int T^r(\xi,\xi')\,e^{-2\pi i S(\lambda\xi)}\,d\xi\,d\xi'$$

(49)

$$= \frac{1}{(H\log\varepsilon)^r}\sum_{\Gamma}\left(\frac{\mu(a)}{\varphi(a)}\right)^r e^{-2\pi i S(\gamma\lambda)} R_\gamma(\lambda) + O\left(A^{r-1}a^{-\frac{3}{4}-1}\right),$$

wobei

$$R_\gamma(\lambda) = \int_{F_\gamma}\int J^r(z,z')\,e^{-2\pi i(\lambda z+\lambda' z')}\,dz\,dz'$$

sei.

Hilfssatz 17. $$R_\gamma(\lambda) = \frac{A^{r-1}}{[(r-1)!]^2 a^r} + O\left(\frac{A^{r-1}}{a^{r+1}}\right).$$

Beweis: Es ist

$$|L(z,z') - J(z,z')| \leq \int_{\frac{1}{2}}^{\lambda}\int_{\frac{1}{2}}^{\lambda}\left(\frac{1}{\log(uu')} - \frac{1}{a}\right)du\,du'.$$

Substituiert man im letzten Integral $u = x$, $uu' = y$, setzt

$$\Phi_1(y) = \operatorname{Max}\left(2, \frac{y}{\lambda}\right), \quad \Phi_2(y) = \operatorname{Min}\left(\lambda, \frac{y}{2}\right)$$

und teilt den Integrationsweg bezüglich y in $4 \leqq y \leqq A^{3/4}$, $A^{3/4} \leqq y \leqq A$,

so erhält man

$$|L(z,z')-J(z,z')| \leqq \int_4^{A^{3/4}} \left(\frac{1}{\log y}-\frac{1}{a}\right)\log\frac{\Phi_2(y)}{\Phi_1(y)}\,dy + \int_{A^{3/4}}^{A}\left(\frac{1}{\log y}-\frac{1}{a}\right)\log\frac{\Phi_2(y)}{\Phi_1(y)}\,dy$$

$$\ll A^{3/4} + \int_{A^{3/4}}^{A}\left(\frac{1}{\log y}-\frac{1}{a}\right)\log\frac{A}{y}\,dy \ll \frac{A}{a^2}.$$

Hieraus ergibt sich mit Hilfssatz 14 und (42):

$$\int_{F_\gamma}\int |L^r(z,z')-J^r(z,z')|\,dz\,dz' \ll \operatorname{Max}|L-J| \int_{F_\gamma}\int (|L|^{r-1}+|J|^{r-1})\,dz\,dz'$$

(50)

$$\ll \frac{A}{a^2}\left(\int_0^{\frac{1}{\sqrt{A}}}\int_0^{\frac{1}{\sqrt{A}}}\frac{A^{r-1}}{a^{r-1}}\,dz\,dz' + \int_0^{\frac{1}{\sqrt{A}}} dz \int_{\frac{1}{\sqrt{A}}}^{(ht^{-1})^{-1}} \frac{\sqrt{A}^{r-1}\,dz'}{a^{r-1}(z')^{r-1}} + \int_{\frac{1}{\sqrt{A}}}^{(ht^{-1})^{-1}}\int_{\frac{1}{\sqrt{A}}}^{(ht^{-1})^{-1}} \frac{dz\,dz'}{a^{r-1}(zz')^{r-1}}\right)$$

$$\ll \frac{A^{r-1}}{a^{r+1}}$$

und mit (41):

$$\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} L^r(z,z')\,e^{-2\pi i(\lambda z+\lambda' z')}\,dz\,dz' - \int_{F_\gamma}\int L^r(z,z')\,e^{-2\pi i(\lambda z+\lambda' z')}\,dz\,dz'$$

(51)

$$\ll \int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}|L|^r\,dz\,dz' - \int_{-(ht)^{-1}}^{(ht)^{-1}}\int_{-(ht)^{-1}}^{(ht)^{-1}}|L|^r\,dz\,dz' \ll \int_0^{\frac{1}{\sqrt{A}}} dz \int_{(ht)^{-1}}^{\infty}\frac{\sqrt{A}^r\,dz'}{a^r(z')^r}$$

$$+ \int_{\frac{1}{\sqrt{A}}}^{\infty}\int_{(ht)^{-1}}^{\infty}\frac{dz\,dz'}{a^r(zz')^r} \ll \frac{\sqrt{A}^{r-1}(ht)^{r-1}}{a^r} = \frac{A^{r-1}}{a^{r+(r-1)\vartheta}} \ll \frac{A^{r-1}}{a^{r+1}}.$$

Aus (50) und (51) folgt

$$R_\gamma(\lambda) = \int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} L^r(z,z')\,e^{-2\pi i(\lambda z+\lambda' z')}\,dz\,dz' + O\left(\frac{A^{r-1}}{a^{r+1}}\right)$$

$$= \frac{1}{a^r}\int_{-\infty}^{\infty}\left(\frac{e^{2\pi i\lambda z}-e^{2\pi i 2z}}{2\pi i z}\right)^r e^{-2\pi i\lambda z}\,dz \int_{-\infty}^{\infty}\left(\frac{e^{2\pi i\lambda' z'}-e^{2\pi i 2z'}}{2\pi i z'}\right)^r e^{-2\pi i\lambda' z'}\,dz' +$$

$$+ O\left(\frac{A^{r-1}}{a^{r+1}}\right),$$

und hieraus ergibt sich mit Hilfssatz 16 die Behauptung des Hilfssatzes 17.

Um die zu unserem additiven Problem gehörige singuläre Reihe[11]):

$$\mathfrak{S}_r(\lambda) = \sum_{\gamma \bmod \mathfrak{D}^{-1}}\left(\frac{\mu(a)}{\varphi(a)}\right)^r e^{-2\pi i S(\gamma\lambda)}$$

[11]) Siehe Rademacher [3], Seite 156, (4.83).

in (49) einzuführen, schätzen wir folgenden Ausdruck ab:

$$(52)\qquad \frac{A^{r-1}}{[(r-1)!]^2 a^r} \sum_{\substack{\gamma \bmod \mathfrak{O}^{-1} \\ N\mathfrak{a} > t^2}} \left(\frac{\mu(\mathfrak{a})}{\varphi(\mathfrak{a})}\right)^r e^{-2\pi i S(\gamma\lambda)}$$

$$\ll \frac{A^{r-1}}{a^r} \sum_{N\mathfrak{a} > t^2} \frac{1}{\varphi(\mathfrak{a})^{r-1}} \ll \frac{A^{r-1}}{a^r t} \ll \frac{A^{r-1}}{a^{r+1}}.$$

Aus (49), Hilfssatz 17 und (52) folgt somit:

$$\sum_{\gamma \in \Gamma} \int\int_{B_\gamma} T^r(\xi, \xi')\, e^{-2\pi i S(\lambda\xi)}\, d\xi\, d\xi'$$

$$(53)\qquad = \frac{1}{[(r-1)!]^2 (H \log \varepsilon)^r} \frac{A^{r-1}}{a^r} \mathfrak{S}_r(\lambda) + O\left(\frac{A^{r-1}}{a^{\frac{\theta_2}{4}-1}} + \frac{A^{r-1}}{a^{r+1}}\right).$$

Zur Abschätzung des in (6) stehenden Restintegrals wenden wir Satz 2 an und erhalten

$$(54)\qquad \int\int_G T^r(\xi, \xi')\, e^{-2\pi i S(\lambda\xi)}\, d\xi\, d\xi' \ll \sup_{(\xi,\xi') \in G} |T(\xi, \xi')|^{r-2} \int\int_F |T(\xi, \xi')|^2\, d\xi\, d\xi'$$

$$\ll \frac{A^{r-2}}{a^{(r-2)(\theta-4)}} \cdot \frac{A}{a} = \frac{A^{r-1}}{a^{(\theta-4)(r-2)+1}}.$$

Setzt man $\theta = r + 4$, gelangt man über (6), (53) und (54) unmittelbar zu Satz 1.

Literatur

[1] HARDY, G. H. and J. E. LITTLEWOOD: Some problems of "Partitio numerorum"; III: On the expression of a number as a sum of primes. Acta Math. **44**, 1—70 (1923).

[2] MITSUI, T.: Generalized prime number theorem. Japanese J. Math. **26**, 1—42 (1956).

[3] RADEMACHER, H.: Zur additiven Primzahltheorie algebraischer Zahlkörper I: Über die Darstellung totalpositiver Zahlen als Summe von totalpositiven Primzahlen im reell-quadratischen Zahlkörper. Abhandl. math. Seminar hamburg. Univ. **3**, 109—163 (1924).

[4] RADEMACHER, H.: Zur additiven Primzahltheorie algebraischer Zahlkörper III: Über die Darstellung totalpositiver Zahlen als Summen von totalpositiven Primzahlen in einem beliebigen Zahlkörper. Math. Z. **27**, 321—426 (1928).

[5] SCHULZ-ARENSTORFF, R.: Über die zweidimensionale Verteilung der Primzahlen reell-quadratischer Zahlkörper in Restklassen. J. reine angew. Math. **198**, 204—220 (1957).

[6] SIEGEL, C. L.: Additive Theorie der Zahlkörper I. Math. Ann. **87**, 1—35 (1922).

[7] SIEGEL, C. L.: Generalization of Waring's problem to algebraic number fields. Am. J. Math. **66**, 122—136 (1944).

[8] TATUZAWA, T.: Additive prime number theory in an algebraic number field. J. Math. Soc. Japan **7**, 409—423 (1955).

[9] VINOGRADOV, I.: Some theorems concerning the theory of primes. Rec. math. Moscou, N.s. **2**, 179—194 (1937).

[10] VINOGRADOV, I.: The method of trigonometrical sums in the theory of numbers. London: Interscience publishers. O. J.

(Eingegangen am 24. März 1960)

Druck: Brühlsche Universitätsdruckerei Gießen

Mein Lebenslauf

Am 15. Oktober 1934 wurde ich, Otto Körner, als erster Sohn des Kaufmanns Adolf Körner und seiner Ehefrau Gertrud Körner geborene Eckstein in Stolberg, Kreis Aachen, geboren.

In Stolberg leitete mein Vater eine Textilfabrik. 1937 übernahm er die Leitung eines Werkes in Wagenfeld, Kreis Diepholz, wohin ihm seine Familie im Frühjahr 1938 folgte. In Wagenfeld-Haßlingen besuchte ich die Volksschule vom Herbst 1941 bis Ostern 1947. Anschließend trat ich in die Diepholzer Aufbauschule ein, an der ich im Frühjahr 1954 die Reifeprüfung ablegte. Im Mai desselben Jahres begann ich an der Münchener Universität Mathematik und Physik zu studieren. Mein fünfsemestriges Studium in München schloß ich im Juli 1956 mit dem Vordiplom in Mathematik ab. Dann wechselte ich zur Universität Göttingen über, an der ich im November 1958 die Diplomprüfung für Mathematiker bestand. Unter meinen vielen ausgezeichneten Lehrern in München und Göttingen hebe ich hervor Siegel, Deuring, Artin, Maak, Richert und Hund.

Besonders zu danken habe ich Herrn Professor Siegel, der mir im Dezember 1958 das Thema zu meiner Dissertation vorschlug. Während des Entstehens dieser Arbeit und ihrer Abfassung stand ich mit ihm in anregendem Kontakt und empfing von ihm viele wertvolle Ratschläge.

Im Sommersemester 1959 verwaltete ich am Göttinger mathematischen Institut eine wissenschaftliche Assistentenstelle, und seit dem Anfang des Wintersemesters 1959/60 habe ich eine ebensolche Stelle am Marburger mathematischen Institut inne.